Der Begriff des wahrscheinlichkeitstheoretisch Vernünftigen

von der Fakultät für Sozialwissenschaften und Philosophie

der Universität Leipzig

genehmigte

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

Doctor philosophiae

(Dr. phil.)

vorgelegt

von Dipl.-Math. Univ. Patrick Schmid

geboren am 19.04.1981 in Ichenhausen

Gutachter:

Prof. Dr. Pirmin Stekeler-Weithofer

Prof. Dr. Thomas Bartelborth

Tag der Verleihung: 21.06.2011

Einleitung

Wahrscheinlichkeiten sind für Menschen omnipräsent: Nicht nur werden im alltäglichen Umgang Ereignisse nach ihrer Wahrscheinlichkeit beurteilt, sondern auch die empirischen Wissenschaften erstellen wahrscheinlichkeitstheoretische Modelle, um gewisse Sachverhalte erklären und voraussagen zu können. Sie dienen vornehmlich dazu, das Phänomen des Zufalls zu zähmen, welches der Menschheit schon seit Urzeiten bekannt ist[1]. Etwa wurde das Werfen von Würfeln, wie wir es heute kennen, schon von Höhlenmenschen mittels Tierknochen realisiert. Zudem wird in einer der ältesten überlieferten Erzählungen, der aus Indien stammenden „Mahabarata" aus dem Jahre 400, explizit ein Zusammenhang von Würfeln und der Schätzung einer Größe aus einer Stichprobe erwähnt, was Ansätze einer theoretischen Erfassung des Zufalls beschreibt[2]. In dem dritten Buch dieses großen epischen Werkes geht es um die Geschichte von Nala, der bei einem Würfelspiel gegen die Gottheit Kali sein Reich und seine Gemahlin verliert. Nach vielen Jahren der Wirren nimmt er schließlich auf Geheiß eines Schlangengottes bei dem fremden Fürsten Rtuparna einen Posten an. Letzterer stellt auf einer Reise seine mathematischen Fähigkeiten zur Schau, indem er die Anzahl der Blätter und Früchte eines Baumes anhand eines einzelnen Zweiges korrekt schätzt, was er mit

„I of dice possess the science and in numbers thus am skilled."

kommentiert[3]. Nala lässt sich diese Kenntnisse von Rtuparna vermitteln und gewinnt letztendlich in einem alles entscheidenden Würfelspiel mit Kali alles zurück. Damit lehrt uns diese Geschichte, dass schon damals in Indien erkannt wurde, dass es sich beim Würfeln nicht um eine reine Glückssache handelt, sondern man Ordnung in diese Zufälligkeiten bringen kann und es tatsächlich eine Wissenschaft darüber zu erlernen gab. Dementsprechend ist es verwunderlich, dass es bis zur Renaissance keine ernsthaften Versuche zur mathematischen Beschreibung dieser Intuition gab. Die Geschichte von Nala war eines der ersten Schriftstücke in Sanskrit, das eine weite Verbreitung in Europa erfuhr, doch es wurde nur von den deutschen Romantikern bewundert und niemand beachtete diese für damalige Verhältnisse kuriose Behauptung. Schlagartig ab 1650 ergab sich dann aber ein ausuferndes Interesse an Sachverhalten und Fragestellungen, welche heute standardmäßig mittels der Wahrscheinlichkeitstheorie beschrieben werden: Geburts- beziehungsweise Todesstatistiken sowie Glücksspiele[4]. Der eigentliche Beginn der Entstehung der Wahrscheinlichkeitstheorie wird auf 1654 datiert, da in diesem Jahr die Pascal-Fermat-Korrespondenz stattfand, welche ein sich aus einem Glücksspiel ergebendes Problem mit einem

[1]Die nun präsentierten historischen Kommentare sind weitgehend Hackings „Emergence of Probability"[89] entliehen. Darin versucht er, im Sinne der Foucault'schen Archäologie statt einer rein historischen Betrachtung die Geschehnisse geeignet zu ordnen, um die Gegenwart zu verstehen.

[2]Natürlich sind diese beiden Fragestellungen nicht vollkommen äquivalent, aber eng miteinander verknüpft. Demnach weist die Textpassage auf ein tief gehendes Verständnis des Zufalls hin.

[3]Aus der Übersetzung von H. H. Milman [245].

[4]Es wurden auch Themen erfasst, die selbst heute keine rigorose Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie nach sich ziehen, wie die Evaluation des Wertes von Beweisen in rechtlichen Disputen oder die Manifestation von Wundern.

wahrscheinlichkeitstheoretischen Ansatz löste[5]. Dabei ist zu bemerken, dass Bayes (1702 - 1761), der später der aus der Wahrscheinlichkeitstheorie entstehenden epistemologischen Anschauung des Bayesianismus seinen Namen aufgrund des von ihm bewiesenen Theorems leihen sollte, nicht an der vordersten Front zugegen war. Die Wahrscheinlichkeitstheorie in ihrer heutigen Form, welche durch einen mehrstufigen Abstraktionsprozess geschaffen wurde[6] und einen Teilbereich der Analysis konstituiert, was sie als angewandte Mathematik klassifiziert, hat sich doch sehr weit von ihren Wurzeln entfernt, die den für pragmatische und fundamentale wissenschaftstheoretische Fragen relevanten Teil darstellen.

Besonderes Vertrauen in Wahrscheinlichkeiten entstand aufgrund der vor mehreren hundert Jahren in einem Bezugszeitraum gemachten Beobachtung, dass das Verhältnis von geborenen Jungen und Mädchen in London, Paris, Berlin und St. Petersburg nahezu konstant war [133]. Dies lässt sich durch eine gewisse Uniformität der Welt erklären. Auch wenn man nicht sicher über ein Ereignis sein kann, so kann man wenigstens ausnutzen, dass die Stabilität der relativen Häufigkeit für bestimmte Phänomene eine empirische Tatsache darstellt. Diese Uniformität kann man auch für viele weitere Ereignisse vermuten, was dem Umstand geschuldet ist, dass unser Leben zu großen Teilen aus Wiederholungen besteht oder von ihnen bestimmt wird. Wenn man dies von einem makroskopischen Standpunkt aus betrachtet, wird dies besonders deutlich daran, dass sich unser Planet auf annähernd periodischen Bahnen um die Sonne bewegt[7]. Dies induziert nicht nur den immer wiederkehrenden Rhythmus der Jahreszeiten, sondern veranlasst uns auch noch dazu, unsere Zeitrechnung danach auszurichten, was zu einer fortdauernden Wiederholung speziell ausgezeichneter Daten und den damit verbundenen Begleiterscheinungen im Sinne von Ritualen führt. Zusätzlich wird durch die Rotation der Erde sogar noch eine weitere Periodizität, die alternierende Wiederholung von Tag und Nacht, etabliert. Neben dem Ort erlegt uns auch noch die Form unserer Existenz gewisse Beschränkungen auf: Weil das Weiterleben der Menschheit nicht durch Individuen, die potentiell beliebig lange leben können, realisiert wird, sondern durch Nachkommen, welche die endlichen Lebensdauern der existierenden Menschen kompensieren, ergeben sich zwangsweise Wiederholungen, um Kinder immer wieder an die Rolle von Erwachsenen heranzuführen. Diese gewissermaßen aufgezwungenen Wiederholungen sind jedoch bei weitem nicht die Einzigen in unserem Leben, denn wir verpflichten uns auch freiwillig zu ihnen, weil sie erstens Abläufe effizienter gestalten und zweitens sogar als angenehm empfunden werden[8].

[5] Dazu später mehr in Unterabschnitt 1.1 von Kapitel 2, der das klassische Verständnis von Wahrscheinlichkeiten erläutert.

[6] Man denke hierbei nur an die Verallgemeinerung des mathematischen Erwartungswertes als Skalarprodukt im Hilbertraum.

[7] Unter anderem an der Notwendigkeit von Schaltjahren im Gregorianischen Kalender merkt man, dass das wirklich nur näherungsweise gilt.

[8] Wiederholungen können auch im Sinne von „Übungen" verstanden werden, wobei eine Übung jede Operation bezeichnet, durch welche die Qualifikation des Übenden zur nächsten Ausführung der gleichen Operation erhalten oder verbessert wird. In diesem Verständnis wird in [209] Religion als „anthropotechnisches Übungslager" enttarnt.

Allerdings werden die zentralen Begriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie, Zufall und Wahrscheinlichkeit, im Alltag und in den Wissenschaften inflationär benutzt, ohne dass diese kritisch reflektiert worden sind. Trotz der enormen Bedeutung der Wahrscheinlichkeitsrechnung für die Wissenschaft im Allgemeinen ist dies der Fall: „...die Verurteilung dieses Kalküls würde die Wissenschaft als Ganzes verurteilen."[9]. Die natürliche Folge dieser fehlenden Reflektion besteht in einem höchst oberflächlichen Verständnis, welches schon durch Fragen, die auf eine etwas fundiertere Interpretation abzielen, systematisch zerlegt wird. Es scheint ja zum Beispiel Allgemeinwissen zu sein, dass die Wahrscheinlichkeit, im Lotto die richtigen 6 aus 49 Zahlen zu tippen, rund 1 zu 13 Millionen beträgt. Doch was nützt das einem? Soll man sich in dem Wissen über diese winzige Chance dem Spiel kategorisch verweigern? Was ist, wenn man vielleicht doch gewinnen würde? Können unwahrscheinliche Ereignisse, da sie trotz aller gegenteiliger Voraussagen dennoch immer wieder vorkommen, nicht ebenso eintreten wie wahrscheinliche? Zudem muss die Überstrapazierung des Erklärungsanspruches von Wahrscheinlichkeiten dem kritischen Beobachter geradezu belustigend erscheinen: Empirische Wissenschaften wie etwa die Ernährungswissenschaft suchen ihr Heil in Studien (im Sinne von statistischen Auswertungen) zum Nachweis eines kausalen Zusammenhangs; diese warten aber nur darauf, komplementär ausgerichteten Studien zu begegnen, die genau das Gegenteil, also eine Unkorreliertheit der Phänomene, zeigen. Diese Praxis des unreflektierten Umgangs mit den Begriffen Wahrscheinlichkeit und Zufall ist einer der vielen Gründe, warum die gegenwärtige Wissenschaftsgläubigkeit teilweise in Aberglauben ausartet und aus den Fugen gerät.

Oft herrscht ein geradezu romantisches Verständnis vor, was auch die Bezeichnung „Risiko" betrifft, welche uneinheitlich eingesetzt wird. Wann spricht man etwa von einem risikoreichen Geschäft? Man stelle sich eine Wette auf irgendein Ereignis vor, bei dem man höchstens einen Dollar verlieren kann. Selbst wenn der Eintritt des Ereignisses extrem unwahrscheinlich ist, kann man so etwas gerechtfertigt als risikoreich bezeichnen? Wohl kaum. Wenn man von Risiko spricht, geht es eigentlich immer um Konsequenzen für eine Person. Dennoch wird „Risiko" oft synonym mit „Wahrscheinlichkeit" verwendet; so auch in dem Artikel „Reassessing Risk. Wall Street failed spectacularly in managing it." aus dem Time Magazin[10]: Es besteht wohl kein Zweifel daran, dass jeder weiß, was ein bestimmter Geldbetrag wert ist, weshalb sich der Titel nur auf die Wahrscheinlichkeit beziehen kann.

Ihre Botschaft besteht darin, dass das eigentliche Problem der Finanzkrise des Jahres 2008 die unabsichtlich falsche Einschätzung von Wahrscheinlichkeiten gewesen sei. Das kann natürlich der Fall gewesen sein, aber die Aspekte, welche in dem Artikel herausgehoben werden, sprechen Sachverhalte an, die diesen Verdacht nicht unbedingt erhärten. Sie bringen den Vergleich zu Naturkatastrophen, welche passiert sind, obwohl man die Wahrscheinlichkeit gering einstufte: „How we perceive risk: After a big event, denial turns into entrenchment.". Dieser Umstand zeige laut ih-

[9] Sinngemäß übersetzt aus [169].

[10] Ausgabe der Woche vom 22. Dezember 2008.

nen, dass die Wahrscheinlichkeiten grundsätzlich falsch eingeschätzt wurden. Damit spielen sie auf die sogenannte „Paradoxie des Unwahrscheinlichen" an, welche eines der polemischsten und naivsten Argumente gegen den Nutzen von Wahrscheinlichkeiten darstellt: Weil das Gegenteil eintrat, war die Wahrscheinlichkeitsbewertung zwingend falsch. Jedoch liefern Wahrscheinlichkeiten immer nur Vernunftgründe und schließen das Gegenteil nicht aus. Wenn sie dazu im Stande wären, könnten wir die Zukunft perfekt voraussagen, was man aber keinesfalls vernünftig erwarten kann.
Weiterhin sehen sie Computer als Mitverursacher der Krise, was sich am besten mit dem Untertitel zu einem Foto illustrieren lässt, welches einen Computermonitor und einen verzweifelten Händler zeigt: „Faith in computer models shaken". Schuld sind also die Computer und die von ihnen verwendeten Modelle. Aber woher kommen diese denn? Die Modelle wurden von Menschen entworfen und Computer tun nur das, was ihnen aufgetragen wird. Es erscheint lächerlich, eine Maschine, die lediglich Anweisungen ausführt, für irgendetwas moralisch verantwortlich zu machen[11]. Demnach liege die Lösung zur Wiedervermeidung einer solchen Krise auf der Hand: „A new approach is emerging: human judgment.". Entscheidend sei es, sich auf sein Bauchgefühl zu verlassen. Es kann aber nicht ernsthaft behauptet werden, dass das Bauchgefühl einer rationalen und ausgefeilten Beurteilung vorzuziehen sei. Schließlich kommen sie zu der fundamentalen Einsicht „... risk was not something that could be reduced to a number ...". Diese Behauptung wird uns noch speziell interessieren, wenn wir in Abschnitt 2 von Kapitel 2 die formalen Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten in den verschiedenen Interpretationen ableiten.
Vielmehr sind andere Gründe für die Krise verantwortlich, die in dem Artikel zweitrangig genannt werden, wie etwa unverlässliche Organisationsstrukturen der Banken. Abteilungsleiter erhalten die Bezeichnung „old-school banker", wenn sie tatsächlich nur solche Entscheidungen absegnen, deren Hintergründe und Konsequenzen sie auch verstehen. Falls eine derartige Kontrolle nicht stattfindet, können sich Fehler auftürmen. Es muss erschreckend wirken, dass ein derartiges Verhalten anscheinend vom Normalfall abweicht. Weiterhin ist bewusster Betrug zu nennen. Ratingagenturen für Wertpapiere gaben Evaluationen ab, die nicht ihr bestes Wissen widerspiegelten, sondern nur aufgrund finanzieller Verdienstmöglichkeiten getätigt wurden. Banker werden durch das System, in das sie eingebunden sind („risk-adjusted employee pay"), geradezu zu solchen Handlungen getrieben, was bedeutet, dass das Problem in gewisser Weise hausgemacht ist. Ein System, in dem es üblicherweise um Kapitaleinsätze in Milliardenhöhe geht, ist ohne Kontrollmechanismen nicht auf Selbsterhaltung und Stabilität ausgerichtet.

Gerade wegen der eminenten Bedeutung von Wahrscheinlichkeiten für sowohl theoretische als auch praktische Zwecke soll hier der Wahrscheinlichkeitsbegriff von Grund

[11] Dass Menschen immer wieder den tückischen Computern erliegen, meint zum Beispiel auch die Frankfurter Allgemeine Zeitung (Ausgabe vom 31. Mai 2010), da sie in einem Wissensartikel provokant die Frage stellt, wer heutzutage denn wisse, was ein Algorithmus sei. Ein Algorithmus ist eine simple Befehlsfolge, denn etwas Anderes führen Computer auch nicht aus. Jeder, der schon einmal gekocht hat, hat einen Algorithmus befolgt.

auf entwickelt werden, was uns in die Lage versetzen wird, auf aktuelle Fragen der Epistemologie und Wissenschaftstheorie zu antworten.
Im ersten Kapitel werden wir mehrere Vorüberlegungen anstellen: Welchem Zweck sollen Wahrscheinlichkeiten dienen und was hat man eigentlich unter der in der Umgangssprache omnipräsenten Bezeichnung des Zufalls zu verstehen?
Das Vorgehen im darauffolgenden Kapitel wird darin bestehen, sich ausgehend von den bekanntesten Konnotationen des Wahrscheinlichkeitsbegriffes[12] bewusst zu machen, dass diese bezüglich der formalen Eigenschaften beinahe ausnahmslos[13] die Kolmogorov-Axiome erfüllen. Zusätzlich dient es dazu, herauszufinden, welche der gängigen Wahrscheinlichkeitsinterpretationen die den Wahrscheinlichkeiten in Kapitel 1 zugedachte Rolle am besten befördert. Weiterhin wird noch diskutiert, was den Grundbaustein für eine Wahrscheinlichkeitstheorie konstituieren sollte. Dies läuft im Wesentlichen auf die Frage hinaus, ob dies besser mit absoluten oder konditionierten Wahrscheinlichkeiten zu erreichen sei.
In Kapitel 3 werden wir den umgekehrten Weg beschreiten: Ausgehend von Ansätzen zur Darstellung von Informationen, welche sich historisch betrachtet durch eine Variation der formalen Charakteristika von Wahrscheinlichkeiten ergaben und meistens auf die Bedürfnisse einer maschinellen Verwirklichung der Künstlichen Intelligenz zugeschnitten sind, möchten wir untersuchen, inwieweit diese einer epistemologischen Dimension Rechnung tragen, die von Wahrscheinlichkeiten gänzlich vernachlässigt wurde. Unser Vorgehen ist insofern systematisch, als dass wir in Kapitel 2 ausgehend von prototheoretischer Intuition formale Regeln abgeleitet haben und nun anhand einer systematischen Untersuchung derselben Rückschlüsse darauf führen wollen, ob anfänglich ein wichtiger Aspekt zum Umgang mit Unwissenheit[14] absent war. Zusammenhängend mit der Thematik von formalen Eigenschaften und deren Deutung werden wir uns noch mit zwei analytischen Resultaten der mathematischen Wahrscheinlichkeitstheorie, dem Satz von Bernoulli und dem Repräsentationstheorem von DeFinetti, auseinandersetzen und dabei klären, ob die verschiedenen Interpretationen, welche sie genießen, einer streng rationalen Betrachtung standhalten.
Im nächsten Kapitel werden wir uns speziell bayesianischen Fragestellungen widmen. Zuerst werfen wir einen zweiten Blick auf die bayesianische Begründung der Wahrscheinlichkeitsaxiome durch das berüchtigte „(synchrone) Dutch-Book-Argument”, was insbesondere deshalb notwendig ist, weil es sich wohl um die unkonventionellste Etablierung der Axiome handelt[15]. Dies wird uns zu einem tieferen Verständnis von Glaubensgraden führen. Zudem wird die Erweiterung auf das diachrone Szenario und die damit versuchte Begründung des „Reflektionsprinzips” angesprochen.

[12]Hierbei greifen wir unter anderem auf den Eintrag „Interpretations of Probability” aus der Stanford Encyclopedia of Philosophy (Version vom 7.Mai 2003) und den Eintrag „Probability” aus der Routledge Encyclopedia of Philosophy of Science zurück.

[13]Die Interpretation von Wahrscheinlichkeit als Tendenz im Rahmen der Propensitätstheorie nimmt hier eine etwas abweichende Stellung ein.

[14]Wenn man von vollständiger Ignoranz absieht, kann bei der Beurteilung von Unwissenheit immer schon Wissen eingehen, weshalb man Umgang mit Unwissen beziehungsweise Wissen als zwei Seiten der gleichen Medaille betrachten mag.

[15]Hierbei greifen wir für bekannte Einwände unter anderem auf [93] zurück.

Dann werden wir uns mit der „Self-Sampling-Assumption" auseinandersetzen. Der Einsatz dieser Annahme in Szenarien, in denen es um die Entstehung von Menschen geht, führt unter anderem zu stark kontraintuitiven Resultaten. Es wird untersucht, inwiefern die Argumentationsschritte gültig sind. Abschließend in diesem Kapitel werden wir uns dem Begriff des Wissens selbst zuwenden, welcher aus noch darzulegenden Gründen auf das Engste mit dem Konzept des Zufallsglücks verbunden ist. Auf diese Weise kann sinnvoll eine bayesianische Komponente in die Diskussion bezüglich der erst seit kurzem bestehenden „safety-based approaches to knowledge" eingebracht werden.
Im fünften Kapitel werden wir die Relevanz von Wahrscheinlichkeiten für entscheidungstheoretische Modelle diskutieren. Bei der anfänglichen Motivation des formalen Rahmens werden wir insbesondere Fragen bezüglich Wahrscheinlichkeiten für eigene Handlungen beantworten, da diese einen nicht vollständig geklärten Status innehaben. Nach der Darstellung der vernünftigen Lösung des Newcomb-Problems, welches selbst heute noch zu Verwirrungen führt, werden wir den entscheidungstheoretischen Standardansatz auf strategische Entscheidungssituationen erweitern, welche deutlich komplizierter sind, da sich im Verlaufe der sich über längere Zeiten erstreckenden Handlungsabfolge der epistemische Zustand des Entscheiders selbst verändern kann. Zum Abschluss werden wir noch auf das Verhältnis der Entscheidungstheorie zur Spieltheorie eingehen, was besonders vor dem Hintergrund interessant ist, dass die jeweils andere Theorie als Spezialfall angesehen wird und somit kein klares Abhängigkeitsverhältnis besteht.
Abrundend werden wir im letzten Kapitel Wahrscheinlichkeiten in das erkenntnistheoretische Problem der Induktion einordnen, was uns zu einer detaillierteren Diskussion der Statistik überleitet, welche heutzutage nur zu oft als Orakel fungiert.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Vorüberlegungen

1.1 Wahrscheinlichkeiten

Dieser erste Abschnitt stellt in gewisser Weise das Manifest für das Folgende dar.

Ständig sind wir Menschen mit Unsicherheit konfrontiert. Das Ergebnis eines Wurfes eines Würfels ist geradezu paradigmatisch dafür. Es scheint nahe zu liegen, dieses Unwissen mittels möglicher Welten zu modellieren, welche sich immer nur auf den Teilaspekt von Interesse beziehen: Für den Standardwürfel bedeutet das, dass wir je nach Wurfresultat sechs mögliche Welten unterscheiden. Natürlich stellt sich die Frage, *wie* die entsprechenden Möglichkeiten zu verstehen sind. Wir fordern sie in einem rein logischen Sinne. Sie beschreiben sich gegenseitig ausschließende Szenarien, deren Gesamtheit alle logischen Möglichkeiten erschöpft. Stärkere Einschränkungen zum Beispiel nomologischer Art, also dass alle Naturgesetze berücksichtigt werden[1], stellen nur unnötigen Ballast dar; es kann gut sein, dass dem Anwender gar nicht alle Naturgesetze vertraut sind, weshalb diese Bestimmung überzogen wäre. Dagegen sollte jedes rationale epistemische Subjekt mit der klassischen Logik vertraut sein. Statt wie im „possibilist realism" [138] (als parallel existierende Welten) verstehen wir die möglichen Welten wie im „actualist representationism" [29] als maximal konsistente Darstellungen, wie die Welt sein könnte, da letztere Konzeption für unsere Bedürfnisse ausreicht und das Postulat von Parallelwelten nicht gerade von ontologischer Sparsamkeit[2] zeugt. Üblicherweise werden Mengen, die mögliche Welten als Elemente haben, als Propositionen bezeichnet und für uns spielen sie die Rolle von Ereignissen in sowohl singulärer als auch generischer Hinsicht[3]. Das mag zugegebenermaßen eine grobe Verfahrensweise sein, aber eine Diskussion hierüber soll nicht zu unseren Themen gehören. Zudem fassen wir Absichten, welche als Versprechen

[1] Etwa ist es nicht möglich, sich schneller als das Licht zu bewegen.

[2] Insofern es sinnvoll ist, „ontologische Sparsamkeit" als Argument zuzulassen.

[3] Das ist durch die Verwendung dieser Terminologie im Sinne der Wahrscheinlichkeitstheorie motiviert. Damit fallen auch Zustände darunter, welche manche Philosophen nicht als Ereignisse sehen möchten.

beziehungsweise schematisierte Vorgehen einen komplizierteren Status innehaben, als „mentale Ereignisse“ auf; das Gleiche gilt auch für allgemeinere Gedanken.
Aus unserer Sicht stellen Wahrscheinlichkeiten ein Hilfsmittel für ein epistemisches Subjekt dar, mit dieser Unkenntnis umzugehen, weshalb sie letztendlich Anweisungen für Handlungen geben können sollten, welche den Beitrag von Menschen zur Welt ausmachen. Somit verstehen wir Wahrscheinlichkeiten als eine „Bewertung“ von Propositionen[4], welche zu Zwecken von Handlungsempfehlungen verwendet werden kann. Allerdings werden auch teilweise Sätze formaler Sprachen als Argumente von Wahrscheinlichkeitsfunktionen verwendet. Die Frage, ob sich Wahrscheinlichkeiten eher mit Propositionen oder Sätzen beschäftigen sollten, gehört eigentlich in die Philosophie der Logik. Wir können ohne größere Einschränkungen mögliche Welten verwenden[5], da sich die beiden Formalismen ineinander übersetzen lassen: ein Satz drückt eine Proposition aus, wenn er in genau den möglichen Welten wahr ist, welche in der Proposition enthalten sind. Wenn wir jetzt Propositionen abstrakt im Rahmen der Wahrscheinlichkeitstheorie als Teilmengen des Ergebnisraumes auffassen[6], ist die große Frage, womit diese Evaluation vollzogen werden soll und welche formalen Eigenschaften sie hat[7]. Darauf werden wir in Kapitel 2 antworten.
Zudem möchten wir uns hier noch für einen Finitismus aussprechen: Wir betrachten nur endlich viele mögliche Welten. Theoretisch ist es natürlich denkbar, unendliche viele mögliche Welten zu behandeln; doch in dem Sinne, dass wir einen vernünftigen Gehalt aus der Wahrscheinlichkeitstheorie extrahieren wollen, beschränken wir uns auf endliche Anzahlen, da aktuelle Unendlichkeiten nicht existieren und wir deshalb davon ausgehen können, dass niemals so viele Alternativen tatsächlich verfügbar sind. Unendlichkeiten existieren nur in dem Paradies, in welchem die Mathematiker leben[8].

Wie gestaltet sich nun die Beziehung von Unkenntnis und Zufall? Zunächst ist zu bemerken, dass Unwissenheit einen Zustand beschreibt, Zufall aber einen Vorgang, was man an Redewendungen wie „Der Zufall ist am Werk.“ merkt[9] . Der Zufall impliziert, dass vor seiner Wirkung eine bestimmte Unsicherheit bestand. Aber nicht auf jede Unkenntnis folgt ein Zufall: Etwa wenn in einem sportlichen Vergleich ein deutlich besser vorbereiteter Sportler gewinnt, mag dieser Ausgang vorher nicht vollständig klar gewesen sein, aber man scheut davor zurück, hier von Zufall zu sprechen. Von Zufall spricht man immer dann, wenn keinerlei Anhaltspunkte bezüglich

[4]Wenn wir von der „Bewertung möglicher Welten“ sprechen, so meinen wir einelementige Propositionen.

[5]Eine Ausnahme stellt Garbers Lösung des „old evidence problem“ [73] dar, da sie Sätze benötigt. Auf das Old-Evidence-Problem kommen wir in Kapitel 2 Abschnitt 4 zu sprechen.

[6]Dazu mehr in Kapitel 2 Unterabschnitt 2.1.

[7]Sind es etwa Vektoren im vierdimensionalen Raum?

[8]Sollten tatsächlich unendlich viele mögliche Welten existieren, so repartitionieren wir auf endlich viele Alternativen; diese sind dann natürlich nicht alle als mögliche Welten auffassbar, aber die methodische Behandlung bleibt dieselbe, falls alle Teile der Partition nichttriviale Wahrscheinlichkeiten erhalten.

[9]Einen Zustand bezeichnet man als zufällig, wenn er durch einen Zufall zustande kam.

der Manifestation eines bestimmten Ereignisses vorhanden waren. So wäre es etwa Zufall, wenn der untrainiertere Sportler gewinnt oder der Wurf eines normgerecht gefertigten Würfels eine bestimmte Zahl liefert[10].

[10] In dem Sinne eines Zustands nennt man ein Muster zufällig, falls man kein ordnendes Prinzip erkennen kann, da aus der Sicht des Urteilenden ebenso gut ein anderes Muster hätte entstehen können.

1.2 Wie konstituiert sich der Zufall?

Die Frage nach der Existenz des kausalen Determinismus, also ob in gewisser Weise alle Ereignisse vorherbestimmt sind, zählt wohl zu den ältesten und am heftigsten debattierten Themen der Philosophie. Besondere Erwähnung im Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeiten erfuhr sie erstmals durch Laplace [133]. Um genau zu sein, ist mit kausalem Determinismus gemeint, dass der Zustand des Universums zusammen mit den Naturgesetzen alle weiteren Begebenheiten festlegt. Besondere Schärfe erlangte die Diskussion aufgrund des Spannungsfeldes, das sich zwischen den Naturwissenschaften auf der einen und der Möglichkeit des freien Willens auf der anderen Seite auftat. Seit dem siebzehnten Jahrhundert sind die Naturwissenschaften nicht zuletzt aufgrund der Beiträge von Newton unheimlich erfolgreich: Beispielsweise lassen sich sowohl der Fall eines Apfels vom Baum als auch die Bewegungen der Himmelskörper mit Hilfe der gleichen Gesetze erklären, welche ungemein präzise Vorausberechnungen ermöglichen. Zudem können viele Begebenheiten, denen man einst einen nebulösen und mystischen Charakter zuwies, heutzutage nüchtern erklärt werden: Vor Jahrtausenden sah man Wettererscheinungen wie Blitz und Donner als nur den Launen der Götter unterliegende Signale für Sterbliche an, aber heute können wir nicht nur einigermaßen verlässliche Wettervorhersagen machen, sondern haben sogar einen geradezu abgeklärten Bezug zu ihnen. Wie kann man vor diesen Errungenschaften die Möglichkeit des kausalen Determinismus nicht ernst nehmen, wenn eine erfolgreiche Voraussage wohl auch die Vorherbestimmtheit nahelegt? Allerdings hat wohl schon jeder einmal erfahren, dass eine vom ihm abverlangte Entscheidung sehr schwer zu treffen war und man sich erst nach mehrfachem Hin- und Herüberlegen endgültig zu einer Wahl durchringen konnte. Wozu der ganze Aufwand, wenn das Ergebnis schon längst festgelegt war?

Es gibt wohl nur wenige Menschen, die vehement abstreiten, dass es Abläufe gibt, welche einem geordneten Weg folgen; die Frage ist aber, ob dies auf alle erdenklichen Veränderungen in der Welt zutrifft. Insofern ist der Vorgang der Anhäufung von Wissen über Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten historisch als Einengung von Kandidaten, welche indeterministische Prozesse[11] darstellen könnten, zu verstehen. Bereits vor einigen Jahrhunderten wurden substantielle Fortschritte gemacht, wobei die Epoche der Aufklärung als Initialfunke für das bald um sich greifende Feuer vernunftgeleiteter Erkenntnis betrachtet werden kann, welches sich gleichsam noch heute durch eine immer stärker werdende Diversifizierung der Naturwissenschaften in Teilbereiche bemerkbar macht und auch dazu verleitet, jegliche Grenzen der Voraussagbarkeit in Frage zu stellen: Liest man nicht immer wieder beunruhigende Berichte über neurowissenschaftliche Experimente, die nicht nur zum Zweck entworfen wurden, im Kopf stattfindende Denkprozesse sichtbar zu machen, sondern auch vorherzusagen[12]? Derartige wissenschaftliche Methoden sind weit davon

[11] Damit meinen wir Prozesse, die nicht nach dem oben erwähnten Schema bereits festgelegt sind.

[12] Beispielsweise behaupten Libet [143] und Wegner [248] anhand empirisch ermittelter Daten, dass Entscheidungen tatsächlich schon vom Unterbewusstsein getroffen werden, bevor man sich bewusst für eine Option entschließt; somit sind sie feststellbar, bevor der Entscheider Klarheit über

entfernt, wenigstens annähernd ausgereift zu sein, trotzdem lieferten sie schon den Stoff für zahlreiche Science-Fiction-Filme und -Romane mit zugegebenermaßen unbehaglicher Atmosphäre.

Dieser Wissenszuwachs mag prinzipiell unaufhaltsam erscheinen, aber dennoch gibt es heute zwei (vermutete) Quellen des Indeterminismus, welche sich jeglichen Bestrebungen zu ihrer Vorhersage mittels deterministischen Gesetze erfolgreich widersetzen: der menschliche Wille und quantenmechanische Phänomene.
Zu den quantenmechanischen Phänomenen gehört etwa der Zerfall von Atomkernen: Keine deterministische Theorie kann voraussagen, welche Atome sich spalten; es lassen sich nur statistische Gesetze für die Gesamtzahl angeben. Was sich zuerst als Schock für die Physik im Allgemeinen präsentierte, sollte ihr zu einer Metamorphose verhelfen. Seit Jahrhunderten bestand ein strikt deterministisches Weltbild in der Physik, welches man durch den Erfolg der Newton'schen Theorie auch gar nicht in Frage stellte; aber die Beobachtungen, die man auf der kleinsten Ebene der Materie machte, verlangten nach anderen Erklärungen. Dieser Umstand war nicht nur eine treibende Kraft bei der Etablierung der Quantenmechanik durch entscheidende Beiträge von Bohr, Born, Schrödinger und Heisenberg, sondern auch für die Erschaffung der Wahrscheinlichkeitstheorie in ihrem modernen Gewand[13], da sie einen unverzichtbaren Baustein für Erstere darstellt. Auch wenn die Quantenmechanik mit einigen kontraintuitiven Konzepten wie Quantenverschränkung verbunden ist und sich manche Wissenschaftler nicht endgültig mit ihr anfreunden konnten[14], machte sie, nicht zuletzt weil deterministische Erklärungsversuche mittels „hidden variables" dazu neigen, in Spekulation auszuarten, die Akzeptanz irreduzibel indeterministischer Naturvorgänge wissenschaftlich salonfähig. Da es dieser Art der Unvorherbestimmtheit beschert war, einen Paradigmenwechsel in der Physik herbeizuführen, spricht man bei solchen Vorgängen bezeichnend von dem Auftreten des quantenmechanischen Zufalls.
Der Anfang des letzten Jahrhunderts begnügte sich nicht nur damit, die Menschheit mit dem quantenmechanischen Zufall vertraut zu machen, sondern lieferte mit der Unschärferelation von Heisenberg, die es für unmöglich erklärt, den Impuls und den Aufenthaltsort eines mikroskopischen Teilchens gleichzeitig beliebig genau bestimmen zu können, ein epistemologisches Prinzip zur Identifikation von Grenzen des Wissen, wie es noch nicht da gewesen war. Anstatt sich auf die mangelnde technische Ausreifung von Messgeräten zu beziehen, macht sie eine kategorische Aussage, die sich niemals durch den technischen Fortschritt aufheben lässt. Sicherlich kann man sich skeptisch stellen und ihre Gültigkeit bezweifeln, aber Heisenberg attestierte ihr damals schon empirisch etabliert zu sein und vom gegenwärtigen Standpunkt der Wissenschaft aus hat sich nichts ergeben, was sie diskreditieren könnte. An dieser Stelle ist aber kritisch nachzufragen, um ein Missverständnis zu vermeiden: Impliziert das Vorhandensein einer Schranke für mögliches Wissen schon den indetermi-

seine Position erlangt hat. Dies würde den freien Willen in gewisser Weise als Illusion enttarnen.

[13] Dies wird ausführlich in [243] geschildert.

[14] Hier sei exemplarisch das bekannte Zitat von Einstein „God does not play dice." erwähnt.

nistischen Ablauf von Naturvorgängen? Hier ist sich nochmals zu vergegenwärtigen, was man genau unter Determinismus versteht: dass Anfangsbedingungen und Naturgesetze allein schon den Verlauf der Dinge festgelegen. Nun wird in dieser Definition nicht auf den Kenntnisstand eines Beobachters eingegangen, wodurch es keine Rolle spielt, ob es für einen Beobachter möglich ist, diesen Mechanismus für Voraussagen zu nutzen. Praktisch mag es einem schon „indeterministisch" vorkommen, dass sich die Anfangsbedingungen nicht beliebig genau ermitteln lassen und damit eine Vorhersage erschweren, aber das Obwalten des Determinismus bezieht sich darauf, dass von einem Zustand des Universums nur der Übergang zu einem einzigen weiteren Zustand möglich ist, was dann bedeutet, dass die Existenz von Alternativmöglichkeiten rein fiktiv ist und nur durch die sprachliche Praxis beziehungsweise gesellschaftliche Umgangsformen scheinbar herbeigeführt wird. Wenn sich Quantenphänomene als resistent gegen jede Einbettung in eine deterministische Theorie erweisen, dann ist das sicherlich ein gutes Argument für die Existenz des Indeterminismus, also des Vorhandenseins indeterministischer Abläufe, aber die Unmöglichkeit der hinreichend exakten Bestimmung aller Komponenten eines physikalischen Systems, welche die Situation für den Wissenschaftler zusätzlich erschweren mag, stellt sich allein betrachtet als neutral bezüglich der Determinismusfrage dar. Das beste Beispiel zur Verdeutlichung dieser Feststellung ist die Anwendung probabilistischer Methoden auf die klassische Mechanik, welche sich durch etwaige Unkenntnis der Anfangsbedingungen rechtfertigen lässt. Nur weil der initiale Zustand unbekannt ist und man die Wahrscheinlichkeitstheorie verwendet, müssen den Vorgängen noch lange keine indeterministischen Abläufe innewohnen.

An dieser Stelle muss noch die Beziehung zum Konzept des Chaos erläutert werden. Von dem Vorhandensein eines chaotischen Verhaltens spricht man immer dann, wenn eine marginale Änderung des Anfangszustandes dramatisch unterschiedliche Konsequenzen nach sich zieht, weshalb der sogenannte „Schmetterlingseffekt", bei dem der Flügelschlag eines Schmetterlings einen Sturm auf der anderen Seite der Erdkugel verursacht[15] , als Inbegriff chaotischer Naturabläufe gilt. Hiermit wird nur eine Aussage bezüglich dem Verhältnis der Skalen, auf denen sich Anfangs- beziehungsweise Endzustand abspielen, gemacht und damit die Frage nach dem Determinismus nicht angetastet, da sowohl deterministische als auch indeterministische Varianten des Chaos sowie Mischformen möglich sind. Indeterministische Ereignisse fallen trivialerweise unter die Definition eines chaotischen Vorganges, da man bei einer Wiederholung die Anfangsbedingungen nicht einmal abzuändern braucht, um vollständig unterschiedliche Resultate zu erhalten. Deterministische Systeme verhalten sich chaotisch, wenn die Anfangszustände, welche drastisch unterschiedliche Ausgänge bedingen, dicht beieinander liegen; dies führt unter anderem dazu, dass deterministisch chaotische Systeme als indeterministisch missinterpretiert werden können, falls sich die relevanten Anfangszustände derart gering unterscheiden, dass die Differenzen mittels Messinstrumenten nicht mehr erfassbar sind und es scheint,

[15] Natürlich handelt es sich hier nur um die Explikation einer Idee und nicht um die Beschreibung einer Beobachtung, da es so gut wie unmöglich ist, die dabei entstehenden Luftströmungen hinreichend genau zu erfassen.

als würden identische Bedingungen in unterschiedlichen Ausgängen resultieren. Damit sieht man dann ein, dass sowohl das Konzept des Chaos als auch die Unschärferelation neutral bezüglich der Determinismusfrage bleiben. Vor diesem Hintergrund mag es etwas missverständlich anmuten, wenn VonPlato [243] behauptet, dass die Unschärferelation entscheidend dazu beitrug, dass die moderne Physik einen indeterministischen Charakter erhielt. Der eigentliche Grund bestand in der scheinbar fehlenden Vorherbestimmtheit bei Phänomenen auf kleinster Ebene, welche nicht zuletzt Weyl dazu veranlasste, Atomen einen freien Willen zu zugestehen[16]. Das leitet uns dann auch zu der nach geschichtlichen Maßstäben bedeutenderen vermuteten Quelle des Indeterminismus über.
Der Glaube, dass es sich beim menschlichen Willen um einen freien Willen handelt, existiert schon seit Urzeiten und war bereits vor der oben erwähnten wissenschaftlichen Umwälzung das Hauptargument für die Existenz des Indeterminismus. Mit „freiem Willen" wird die Fähigkeit eines rationalen Entscheiders bezeichnet, trotz seines mentalen Zustandes jede der ihm zur Verfügung stehenden Handlungsoptionen wählen zu können. Damit impliziert ein freier Wille in dieser starken Ausdeutung, dass ausgehend von einem fixierten Zustand des Universums mehrere Zukunftsmöglichkeiten offen sind, falls der Entscheider nicht in irgendeiner Form an der Verwirklichung seiner Intentionen gehindert wird. Gerade weil man an die Freiheit seines Willens glaubt[17], stellt man vor Entscheidungen umfangreiche Überlegungen und Abwägungen an, um diese Freiheit sinnvoll zu nutzen.

Für die Existenz des freien Willens als ein Hauptargument für den Indeterminismus spricht neben einer tief verwurzelten Intuition und der scheinbaren Abwesenheit von Widerständen physischer beziehungsweise psychischer Natur in vielen Entscheidungssituationen noch der Umstand, dass man selbst eine Leistung beitragen muss, um bestimmte Veränderungen herbeizuführen. Wieso gestaltet sich die Erbringung einer solchen oft so anstrengend, wenn es gar keine genuine Alternative gab? Allerdings ist andererseits die Möglichkeit eines Gefüges, welches aus determinierten Ursache-Wirkungs-Beziehungen besteht und damit die Zukunft festlegt, nicht ganz von der Hand zu weisen. Dies wird unter anderem dadurch untermauert, dass vermutlich nichts in der Welt, und damit insbesondere persönliche Entscheidungen, ohne Grund stattfindet. Diese fundamentale Annahme wurde bereits von Leibniz in seinem Prinzip vom zureichenden Grund (principium rationis sufficientis) formuliert. Das Gegenteil ist geradezu undenkbar: Hätte eine bestimmte Erscheinung keinen Grund, so könnte sie sich jederzeit wieder willkürlich manifestieren und unsere geordnete Wahrnehmung der Welt würde zusammenbrechen. Auch wenn sich

[16] Diese Behauptung findet sich ebenfalls in [243].

[17] Diese Intuition wird etwa von Perloff, Xu und Belnap in ihrem Buch „Facing the Future" [12] präzisiert und formalisiert. Aufbauend auf einem Modell von Entscheidern in einer sich verzweigenden Zeit, werden mit Hilfe des sprachlichen Konstrukts „stit" (sees to it that) gewisse Aspekte freien Handelns wie Versprechen und Zurückhaltung erklärt. Insofern man hier von offenen Alternativen und echten Entscheidungen ausgeht, wird die Existenz des freien Willens bereits angenommen und nur versucht, diese plausibel auszudeuten.

einige Phänomene wie etwa der Beginn des Universums gegenwärtig nicht erklären lassen, so geht man dennoch davon aus, dass es einen Grund für sie gibt. Jedoch ist es unmöglich, die Frage nach dem Determinismus endgültig zu klären, da es nur eine einzige aktuelle Welt[18] gibt: Man kann sich nicht davon überzeugen, dass eine Alternative tatsächlich realisiert hätte werden können.

Bei der Existenz indeterministischer Vorgänge lässt sich somit die Ignoranz bezüglich zukünftiger Ereignisse niemals vollständig aufheben[19]. Bei der Gültigkeit des Determinismus mag man vermuten, dass es davon abhängt, ob jemals alle Naturgesetze „entdeckt" werden. Allerdings zeigt das folgende Gedankenexperiment, dass wir selbst bei Kenntnis aller Gesetze und relevanter Anfangsbedingungen keine vollständige Kenntnis über die Zukunft erlangen können. Angenommen, wir wenden diese ultimative Erkenntnismethodik auf unsere eigenen Gedankengänge an, dann würde sie alle Gedanken liefern, die wir uns in der Zukunft machen. In deren Kenntnis reflektieren wir jedoch metastufig über sie, weshalb wir die sich tatsächlich abspielenden Gedankengänge gar nicht kannten. Demnach ist die vollständige Kenntnis der Zukunft in allen Aspekten unmöglich. Man mag vielleicht erwidern, dass eine solche hypothetische Erkenntnismethode auf alles außer Denkvorgängen anwendbar sei, jedoch gilt auch das nicht. In der Kenntnis der Zukunft könnte man etwa gewisse Ereignisse verhindern wollen. Auch wenn man den Gedanken dazu fassen kann, dürfte man niemals dessen Verwirklichung anstreben können, da dies ja dann auch schon bekannt sein müsste. Also muss man trotz dieser Kenntnis *immer* aus irgendwelchen Gründen davon Abstand nehmen, den Lauf der Dinge zu verändern, was zugegebenermaßen schwer nachvollziehbar erscheint. Da der Determinismus nur dann eine plausible Existenz genießt, wenn er niemals aufgedeckt und erfahrbar gemacht wird, sehen wir ein, dass Wahrscheinlichkeiten prinzipiell nicht überflüssig gemacht werden können.

Entsprechend unserer obigen Betrachtung unterscheidet man je nachdem, ob der Unkenntnis ein indeterminierter oder determinierter beziehungsweise schon geschehener Vorgang zugrunde liegt[20], zwischen „objektivem" und „epistemischem" Zufall. Ein gutes Beispiel für Letzteren ist wohl die Münze, die sich in einer von beiden Fäusten verbirgt: Die Person, welche die Münze hält, ist jederzeit darüber informiert, wo sie sich befindet; dagegen muss dem Ratenden der Aufenthaltsort des Geldstücks gleichsam zufällig erscheinen. Bei der künstlichen Generierung von Zufall zieht man den epistemischen sogar oft dem objektiven Zufall vor, da dieser für Unwissende genau so unvorhersehbar ist, sich aber viel einfacher handhaben lässt[21]. Heutzutage werden

[18] Wir nehmen hier gewisse quantenmechanische Spinnereien nicht ernst.

[19] Bezüglich bereits geschehener Abläufe greift die Unbestimmtheit des Indeterminismus nicht mehr, da sie eben schon passiert sind.

[20] Oft spricht man auch von „echtem" und „Pseudozufall", wobei der Zufall für praktische Zwecke schon als echt gilt, wenn nicht bekannt ist, wie die Determiniertheit ausgenutzt werden kann, beziehungsweise kein Mensch Wissen über den Ausgang hat.

[21] Hierzu ein historischer Kommentar. Schon Fisher bemerkte in seinem höchst einflussreichen Werk „The Design of Experiments" [71] von 1935, dass es sich für effiziente und aussagekräftige experimentelle Prozeduren anbietet, die Versuchsanordnung mittels Zufallszahlen aufzubauen, um systematische Fehler zu vermeiden. Diese zufälligen Anordnungen seien laut ihm grundsätzlich mit-

dafür bevorzugt Computer herangezogen, welche auf einen gewählten Anfangswert komplexe Algorithmen anwenden, um ein zufälliges Ergebnis zu liefern.

tels gemischten Kartenspielen zu generieren, was aber doch etwas mühsam sei, weshalb er den Leser auf die Möglichkeit von Pseudozufallszahlen aufmerksam macht, welche man etwa aus Tabellen in Tippetts „Random sampling numbers: Tracts for computers" [229] ablesen könne. Hierbei darf man nicht durch die Bezeichnung „computer" im Titel verwirrt sein, denn um diese Zeit waren solche Apparaturen ja noch nicht verfügbar. Vielmehr wird das Wort in seinem eigentlichen Sinne für Berechner aller Art verwendet.

1.3 Stufen des Wissens

In diesem ersten Kapitel muss noch auf eine grundlegende Tatsache mit weitreichenden Implikationen aufmerksam gemacht werden, welche oft nicht die ihr zustehende Aufmerksamkeit erhält. Die Epistemologie beschäftigt sich besonders mit dem Begriff des Wissens, wobei es sich, vereinfacht gesprochen, um einen begründeten wahren Glauben handelt[22]. Intuitiv ist es wünschenswert, dass die Begründung die Gesamtheit aller relevanten Informationen[23] einbezieht, also Informationen, die, für sich allein betrachtet, gegen oder für die Wahrheit der Proposition sprechen, auf die sich der Glaube bezieht oder in Bezug auf welcher wir einen Glauben formen. Man mag dies als negative beziehungsweise positive Relevanz bezeichnen. Für viele Propositionen, für die man sich interessiert, kann man sowohl positiv als auch negativ relevante Informationen sammeln; allerdings kann die betreffende Proposition bei Einhaltung des tertium non datur nur einen von zwei Wahrheitswerten besitzen, was bedeutet, dass viele der gesammelten Informationen nicht nur überflüssig, sondern auch irreführend waren. Die Hoffnung, die sich hinter der Direktive, alle relevanten Informationen zu sammeln, verbirgt, ist die, dass einem dann eine Feststellung möglich wird welche Informationen genau in diesem Sinne bedeutungslos waren.
Hat man sich obigen Sachverhalt vergegenwärtigt, so erkennt man, dass Informationsanhäufungen den Urteilenden tatsächlich wieder in einen „primitiveren" Zustand zurückwerfen können; die vorherige epistemische Verfassung, in welcher eine partielle Unkenntnis bestand, ist damit manchmal vorzuziehen. Man kann darüber wie Stufen einer Treppe auf einem Escher-Bild denken: Obwohl man auf der Treppe weiter vorangeht, gelangt man an eine tiefere Stelle[24]. Dass etwas aufgrund seiner „Primitivität" tatsächlich überlegen sein kann, stellt ein übergeordnetes Prinzip dar, das sich nicht nur auf die Epistemologie beschränkt; es gilt etwa auch in der Kunst: Kitsch, wie zum Beispiel die aufblasbaren Gummipuppen von Koons, schafft es bis auf Ausstellungen in das Schloss von Versailles. Das passiert in dem Verständnis, dass diese Produktionen in ihrer offensichtlichen Simplizität ausgefeilteren Erzeugnissen anderer Künstler weit überlegen sind. An dem gleichen Strang ziehen auch Pollock mit seinen Farbklecksen oder Warhol mit seinen Mona-Lisa-Fließbandproduktionen. In der Kunst mag sich das durch eine Feststellung von Baudelaire erklären lassen: „Absolute Einfachheit ist tatsächlich der beste Weg, um sich abzuheben.".
Der beschriebene Umstand erklärt, warum Laien manchmal eine bessere Ahnung von dem Wahrheitswert einer Proposition haben als Experten: Der Laie kennt nur „eine" Information, die aber allein schon den richtigen Wahrheitswert nahelegt,

[22] In Kapitel 4 Unterabschnitt 3.2 werden wir uns ausführlicher mit dieser Definition beschäftigen.

[23] Hiermit meinen wir wahre Sachverhalte. Dies muss dem epistemischen Subjekt natürlich bewusst sein, weshalb sie ihrerseits begründet sein müssen. Die hier angesprochene Frage soll sich aber darauf beziehen, wie man von Propositionen, deren Wahrheitswerte sich einfach begründen lassen, auf die Wahrheitswerte von Propositionen folgern kann, die sich nicht so leicht behandeln lassen.

[24] Gewissermaßen noch besser wird die zugrunde liegende Struktur durch die Äquivalenzklassenbildung in der Zahlentheorie nach dem Muster $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ beschrieben: Zahlen werden nur nach den Nachkommastellen beurteilt; der ganzzahlige Anteil ist irrelevant. Schreitet man auf der reellen Achse voran, durchläuft man zyklisch alle Äquivalenzklassen.

der Experte aber noch eine weitere Information, welche zusammen mit der Ersten genau das Gegenteil suggeriert. Allerdings wussten beide nicht, dass es noch eine dritte Information gibt, welche die zweite Information des Experten ähnlich wie die Annihilation von Materie durch Antimaterie nichtig macht. In Kenntnis dieser gerade beschriebenen Möglichkeit kann man auf die Idee kommen, dass man nicht die maximal erlangbare Menge aller relevanten Informationen anstreben, sondern eher nach einer strukturellen Eigenschaft der tatsächlich verfügbaren Informationen suchen sollte, welche einen womöglich erkennen lässt, dass bereits eine Teilmenge derselben alle relevanten Informationen korrekt abbildet oder allein schon den Ausschlag für einen Wahrheitswert geben kann. Ein Vergleich lässt sich etwa bei mathematischen Beweisen finden, wo man darauf verzichtet, alle möglichen Zahlenwerte einzusetzen, und lieber eine strukturelle Eigenschaft derselben ausnutzt. Für allgemeinere Fragen ist es denkbar, gewisse Symmetrieüberlegungen einzubeziehen, also die Fakten so zu gruppieren, dass sie eine bestimmte Vollständigkeit aufweisen. Es wird oft vor gefährlichem „Halbwissen" gewarnt, jedoch wird hier der Versuch angestrebt, durch einen Verzicht auf bekannte Informationen Wissen zu etablieren. Dadurch soll vermieden werden, dass sich durch eine stetige Anhäufung von Fakten die eigene Meinung mehrmals umkehrt. Wenn man dies in die Sichtweise von Wissen als begründeten wahren Glauben einordnen möchte, so handelt es sich hier um die Frage nach Prinzipien, welche eine sehr effiziente Begründung ermöglichen. Jedoch entspringt diese Effizienzforderung nicht nur aus praktischen Überlegungen, denn sie wird auch theoretisch bedeutsam, wenn man an die Grenzen möglichen Wissens stößt. Unter den gemachten Ausführungen lässt sich vielleicht erahnen, was Lao Tzu mit „To attain knowledge, add things every day. To attain wisdom, remove things every day." gemeint haben könnte[25].

[25] Dieser Satz stammt aus Kapitel 48 von „Tao-te Ching" [132], was eines der fundamentalen Schriftstücke des Taoismus darstellt.

Kapitel 2

Von prototheoretischer Intuition zu formalen Regeln

2.1 Interpretationen der Wahrscheinlichkeit

2.1.1 Klassisches Verständnis

Die geschichtlich betrachtet erste Konzeption des Wahrscheinlichkeitsbegriffes wurde von vorwiegend mathematisch interessierten Gelehrten des 17. Jahrhunderts wie Pascal, Fermat, Leibniz, Huygens[1] und Bernoulli [14] geprägt, wobei Laplace mit seinem „Philosophischen Versuch über die Wahrscheinlichkeit" [133] von 1814 das erste philosophisch bedeutende Werk zu diesem Thema liefern sollte. Der genaue Beginn der Wahrscheinlichkeitstheorie wird aber bereits auf 1654 datiert, da in diesem Jahr in einem Briefwechsel zwischen Fermat und Pascal die Lösung eines anwendungsorientierten Problems diskutiert wurde, nämlich wie die Einsätze bei einem vorzeitig abgebrochenen Glücksspiel zwischen den zwei Teilnehmern zu verteilen seien[2]. Bei diesem Glücksspiel werden mehrere Sätze, bei denen jeder Spieler die gleiche „Gewinnchance" hat, gespielt und der Erste, der eine vorgegebene Anzahl an Sätzen gewinnt, erhält den Geldpreis. Die ursprünglich von Fermat präsentierte Lösung gestaltet sich folgendermaßen. Man stelle sich vor, dass Spieler A noch m und Spieler B noch n Gewinnsätze benötigt, so dass höchstens noch $m + n - 1$ Sätze ausgetragen werden. Wir wollen nun annehmen, dass in jedem Fall noch so viele Sätze gespielt werden[3]. Dann ist mühelos einzusehen, dass es 2^{m+n-1} mögliche Ausgänge gibt. Nun muss jeweils nur noch die Anzahl der Ausgänge, die zu dem Gewinn eines bestimmten Spielers führen, durch die Gesamtanzahl geteilt werden, um den

[1] Dieser verfasste das erste mathematische Buch über Wahrscheinlichkeiten [108].

[2] Auszüge davon finden sich beispielsweise in „Games, Gods and Gambling" von David [41].

[3] Pascal sollte zeigen, dass man ohne diese Annahme mittels einer Rekursion auf die gleiche Lösung gelangt, was ein wesentlicher Impuls für die Ausarbeitung der Struktur des Pascal'schen Dreiecks war (Vgl. Katz, „A history of mathematics" [121] Abschnitt 11.3.1.). Wir wollen diese Annahme dennoch machen, da sich mit ihr der grundlegende Gedankengang leichter veranschaulichen lässt.

ihm zustehenden Bruchteil vom Gesamtbetrag des Geldes zu ermitteln, was dann $\sum_{i=0}^{n-1} \binom{m+n-1}{i}/(2^{m+n-1})$ für Spieler A beziehungsweise $\sum_{i=n}^{m+n-1} \binom{m+n-1}{i}/(2^{m+n-1})$ für Spieler B ergibt.

Diese von Fermat präsentierte Lösung mittels Abzählen von Möglichkeiten prägte die klassische Auffassung der Wahrscheinlichkeit, welche dann auch von Laplace präsentiert wurde. Zunächst ist es fundamental, „gleichmögliche" Fälle (oder auch: Elementarereignisse) auszumachen, was in dem obigen Problem als gleichwertige Chance bezeichnet und in gewisser Weise intuitiv erfasst wurde (man stelle sich etwa einen Münzwurf vor). Sind diese identifiziert, so muss man, um die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses zu erhalten, den Quotienten aus der Zahl der günstigen Fälle, welche zum Ereignis von Interesse gehören, und deren Gesamtzahl bilden. Die Prozedur des Zählens von diskreten Möglichkeiten lässt sich bei Bedarf einfach auf kontinuierliche Problemstellungen verallgemeinern: In der verallgemeinerten Form wird, anstatt wie im diskreten Fall mit natürlichen Zahlen, der Quotient von reellwertigen Längen, Flächeninhalten oder allgemeiner Volumina gebildet, was wiederum auf der Annahme basiert, dass alle Punkte des Kontinuums gleichmöglich sind. Dies sei hier aber nur der Vollständigkeit halber erwähnt, da, wie wir bereits bemerkten, für eine weltbezogene Anwendung von Wahrscheinlichkeiten immer nur endlich viele Alternativen zur Verfügung stehen; zudem lassen sich Kontinua geeignet approximieren.

Im sogenannten „Indifferenzprinzip"[4], welches auch als Prinzip vom mangelnden beziehungsweise unzureichenden Grund [239] bekannt ist, findet diese Vorgehensweise ihren Ausdruck: Wenn man keinen Grund kennt, der irgendeinen Fall bevorzugen sollte, dann müssen alle Fälle die gleiche Wahrscheinlichkeit erhalten. Um den Zusammenhang mit dem modernen Konzept der Entropie herzustellen, sei bemerkt, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung, welche durch das Prinzip vom unzureichenden Grunde nahegelegt wird, die Entropie maximiert. Die Entropie misst in der Informationstheorie wie ungeordnet verfügbare Daten sind, also wie wenig Informationen sie kodieren. Je gleichmäßiger eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, desto weniger werden die einzelnen möglichen Welten unterschieden.

Der Haupteinwand gegen eine derartige Einführung des Konzeptes der Wahrscheinlichkeit besteht darin, dass es auf der Gleichmöglichkeit aufbaut. Was ist genau diese Gleichmöglichkeit? Muss man Gleichmöglichkeit nicht auch wieder mit Hilfe von Wahrscheinlichkeit erklären? Die sich unmittelbar aufdrängende Vermutung ist, dass es sich hier um eine zirkuläre Definition ohne Erklärungsgehalt handelt; tatsächlich liegt hier aber ein kategorialer Fehler vor, da einzelne Möglichkeiten nicht in Abstufungen vorkommen, sondern nur bestehen oder nicht. Der alternative Ausdruck „Bestehen einer gleichen Chance" trägt nichts zur Aufklärung des Problems bei. Das Indifferenzprinzip beschreibt den Sachverhalt treffender: Es wird nicht wirklich erklärt, was Wahrscheinlichkeiten sind, sondern nur ein Kriterium für deren Äquivalenz aufgestellt. Es ist gemeinhin der Konsens, dass sie eine modale Eigenschaft beschreiben, aber diese wird nicht auf erhellende Weise weiter analysiert. Eher geht es darum, unter Ausnutzung von Symmetrien eine geeignete Bewertung der Wahr-

[4] Diese Bezeichnung wurde von Keynes in seinem Werk „A Treatise on Probability" [124] geprägt.

scheinlichkeiten für rechnerische Zwecke zu etablieren. Im klassischen Sinne werden nur Probleme betrachtet, die eine Partitionierung in gleichwertige Elementarereignisse zulassen.
Da relevante Symmetrien zu Wahrscheinlichkeitszuweisungen herangezogen werden, muss man sich fragen, wie man zu Wahrscheinlichkeiten gelangen kann, wenn Symmetrien absent sind. Das ursprüngliche Haupteinsatzgebiet der Wahrscheinlichkeitstheorie, das Glücksspiel, wird scheinbar vollständig durch Symmetrien durchzogen (Münzen, Würfel, Roulette und Kartenspiele), wobei Symmetrie natürlich immer in einem approximativen Sinne zu verstehen ist. Allerdings gibt es auch das Phänomen manipulierter Apparaturen wie etwa gezinkter Würfel. Dies sollte später VonMises' Hauptvorwurf gegen die klassische Konzeption sein, denn für ihn war es nicht klar, wie man gezinkte Würfel behandeln soll, da sich ein solcher nicht unmittelbar Symmetrien unterwirft. Er hat insofern Recht, als dass in Abwesenheit von Symmetrien die klassische Interpretation ihrer Grundlage beraubt ist. Dies bedeutet natürlich keinesfalls, dass diese Auffassung in Fällen, wo sie zur Geltung kommen, nicht gute Dienste leisten könnte. Allerdings wird hiermit eine intrinsische Limitierung des klassischen Konzeptes aufgezeigt.
Aber auch wenn eine relevante Symmetrie vorliegt, kann deren Erkennung durch das Bestehen anderer Symmetrien erschwert werden. Dies illustrieren etwa Beispiele[5] im Stil des Bertrand Paradox [15]. Eine Fabrik produziert Würfel mit Seitenlänge bis zu einem Meter. Es sind keine weiteren Informationen bekannt und man stellt sich die Frage, wie groß die Wahrscheinlichkeit sei, dass die Seitenlänge eines Würfels höchstens einen halben Meter betrage, worauf man $1/2$ antworten möchte. Darauf kann man sich überlegen, wie groß denn die Wahrscheinlichkeit sei, dass die Seitenfläche höchstens einen viertel Quadratmeter betrage. Hierbei ist man geneigt $1/4$ zu antworten, was aber mit der vorherigen Antwort inkompatibel ist. Schließlich kann man noch nach dem Volumen bis zu einem achtel Kubikmeter fragen, um die Verwirrung komplett zu machen. Man sieht, dass es mehrere Möglichkeiten gibt, eine Symmetrie anzusetzen, und es keinesfalls offensichtlich ist, wie das bei Abwesenheit von sonstiger Information korrekt zu vollziehen ist. Dass dieses Beispiel nicht willkürlich stipuliert ist, zeigt sich daran, dass angeblich auch schon Leibniz über die Zuweisung einer Symmetrie gestolpert ist: Er soll eine Zeit lang der festen Überzeugung gewesen sein, dass die Wahrscheinlichkeit, bei einem zweimaligen Münzwurf Doppelwappen zu erhalten, $1/3$ betragen müsse, da die Ereignisse („K" steht für Kopf und „W" für Wappen) $\{K, K\}, \{W, K\}, \{W, W\}$ alle gleich möglich wären[6]. Und auch in der Physik gibt es eine analoge Problemstellung: Abhängig davon, wie man Partikeln Zustände zuordnet, lassen sich verschiedene Statistiken (Fermi-Dirac-, Bose-Einstein- oder Maxwell-Boltzmann-Statistiken) ableiten. Welche dieser a priori erkennbaren Symmetrien von bestimmten Teilchenarten wirklich genutzt werden, kann aber erst a posteriori bestimmt werden.
Gerade wenn man aus einem mangelnden Wissensstand heraus urteilt, kann sich die

[5]Das folgende Beispiel stammt aus [232].

[6]Offensichtlich wurde hier die Reihenfolge übergangen; statt der Menge $\{W, K\}$ sollte man eigentlich die beiden geordneten Paare (K, W) und (W, K) betrachten.

Erkennung der relevanten Symmetrie schwierig gestalten. Es sollte schon so viel Situationsverständnis wie möglich einfließen, bevor das Indifferenzprinzip zur Geltung kommt. Die Anwendung dieses Prinzips kommt damit einem vernünftigen Umgang mit Unwissen gleich und ist keinesfalls so zu verstehen, dass man sich anmaßt aus Unwissen Wissen abzuleiten. Eine weitere Informationsbeschaffung ist grundsätzlich einer unnötigen Anwendung des Indifferenzprinzips vorzuziehen. Das Prinzip ist erfolgreich anwendbar, wenn eine vollständige Beschreibung der Situation vorliegt und sich das Unwissen nur auf das Vorhandensein von gegenteiligen Gründen, aber nicht etwa relevante Faktoren bezieht[7].
Frequenzen[8] kommen bei der Gleichmöglichkeit eigentlich nicht zur Geltung. Laplace war sich jedoch bewußt, dass relative Häufigkeiten eine explizitere Beziehung zur Wahrscheinlichkeitskonzeption haben sollten, weshalb er ergänzend die sogenannte „Regel des Aufeinanderfolgens" durch erneutes Abzählen von Möglichkeiten aufstellte. Angenommen, man möchte die Wahrscheinlichkeit, dass morgen die Sonne wieder aufgeht, berechnen und es ist bekannt, dass sie schon n-mal aufgegangen ist. Dann berechnet man sie, indem man $n + 1$ durch $n + 2$ dividiert, da sich ein weiterer Sonnenaufgang in die bisherigen n einreihen würde und die Möglichkeit des Ausbleibens natürlich auch besteht. Dies erklärte auf elegante Weise, warum wir uns nach hinreichender Beobachtung des nächsten Sonnenaufgangs sehr sicher sein können. Laplace nimmt damit schon explizit frequentistisches Gedankengut vorweg, jedoch wird er zu Recht hauptsächlich mit der reinen A-Priori-Konzeption assoziiert, da diese sein eigentliches Anliegen war.

Als Fazit ist zu bemerken, dass bei der klassischen Konzeption im Wesentlichen eine zirkuläre Definition vorliegt und die für diese Interpretation fundamentalen Symmetrien nicht bei jedem Szenario anzutreffen sind. Dass sie manchmal nur als Vorstufe zum logischen Wahrscheinlichkeitsbegriff, dem wir uns gleich widmen werden, angesehen wird, darf nicht ihre geschichtliche Bedeutung als Grundlage für eine vorher noch nie da gewesene Art der Epistemologie herunterspielen. Nicht umsonst bezeichnet man heute Wahrscheinlichkeiten, deren formale Beschreibungen die Kolmogorov-Axiome erfüllen, in Abgrenzung zu anderen Konzepten zur Informationsdarstellung, die wir in Kapitel 3 Abschnitt 1 kennen lernen werden und ebenfalls den Anspruch haben, eine Art Wahrscheinlichkeit zu sein, als „Pascal'sche Wahrscheinlichkeiten".

[7]Zum Beispiel wenn man bei einem Würfel eine ausreichende Homogenität der Masseverteilung feststellen würde.

[8]Zum besseren Verständnis sei erwähnt, wie die Bezeichnungen „Frequenz" und „relative Häufigkeit" hier zu verstehen sind: Sie werden synonym zur Beschreibung von Vorkommnissen in einer endlichen Menge von Versuchen verwendet.

2.1.2 Induktive Logik

Die Deutung der Wahrscheinlichkeit im Rahmen der Logik wird vornehmlich von Carnap [30] [31], Keynes [124], Jeffreys [117] und Wittgenstein [250] vertreten. Sie orientiert sich an der klassischen Interpretation, jedoch wird sie in einem satzbasierten Kontext vollzogen und erlaubt sogar uneinheitliche Gewichte für die verschiedenen Fälle. Dadurch wird die klassische Theorie in einem verallgemeinerten Rahmen formal subsumiert und der Anwender vom Diktat des Indifferenzprinzips befreit, welches die Wahrscheinlichkeitswerte direkt von der Zahl der Alternativen abhängen lässt. Es wird aber nicht der Rückgriff auf irgendeine Form der Gleichmöglichkeit versucht, sondern Wahrscheinlichkeiten wird lediglich ein rein formaler Charakter attestiert, da sie Implikationsgrade zwischen Sätzen beschreiben. Carnap hat diese logische Sichtweise der Wahrscheinlichkeit wohl am ausführlichsten ausgearbeitet, weshalb wir uns nun stellvertretend auf ihn konzentrieren und seine Theorie sowie deren Rechtfertigung skizzieren.

Er betreibt die philosophische Grundlegung dieser Anschauung mit der These: Jedes induktive Schließen, womit jegliches nichtdemonstrative beziehungsweise nichtdeduktive Schließen gemeint ist[9], sei eines aufgrund von Wahrscheinlichkeit. Damit ist die induktive Logik als Theorie von den Prinzipien des induktiven Schließens eine Wahrscheinlichkeitslogik. Der Häufigkeitsbegriff sei wichtig, aber für die induktive Logik unbrauchbar, was er darauf zurückführt, dass dem Wahrscheinlichkeitsbegriff eine Dualität inhärent sei: Alles, was mit beobachtbaren Frequenzen zu tun hat, bezeichnet er als „Wahrscheinlichkeit2”, während der logische Charakter mit „Wahrscheinlichkeit1” benannt wird; seine Wahrscheinlichkeitsinterpretation liefere die beste Explikation des letzteren Teilaspektes. Hierbei besteht dessen Deutung in einer logischen Relation zwischen zwei Sätzen, die den Grad der Bestätigung einer Hypothese aufgrund von Prämissen beziehungsweise eines Erfahrungsdatums angibt, womit er den Begriff der Wahrscheinlichkeit auf dem sogenannten „Bestätigungsgrad” aufbaut. Da Lehrsätze und Prinzipien der induktiven Logik analytischer Natur sind, wird klar, dass damit die Gültigkeit induktiven Schließens nicht von synthetischen Voraussetzungen wie etwa eines Prinzips der Gleichförmigkeit der Welt abhängt. Der Erfolg einer Voraussage auf lange Sicht kann somit nicht garantiert werden; vielmehr handele es sich um eine hilfreiche Orientierung für die Einzelwissenschaften.
Die Wahrscheinlichkeitslogik kann als Verallgemeinerung der klassischen Logik verstanden werden, wenn man Aussagen mit Bestätigungsgrad null oder eins als sichere Aussagen auffasst. Weiterhin gehe es nicht um das Entwickeln von Regeln zum Finden von Naturgesetzen, denn die induktive Logik beginne bei der vorliegenden Hypothese. Damit obliegt das Aufstellen von Hypothesen der Intuition des Naturwissenschaftlers.
In seinem Buch „The logical foundations of probability” [30] betrachtet Carnap

[9]Bei ihm umfasst das induktive Denken somit alle Arten des Schließens, bei denen sich die Folgerung nicht zwingend aus den Prämissen ableiten lässt.

einfache formale Sprachen, welche Individuenkonstanten und logisch unabhängige monadische Prädikate beinhalten. Die sogenannten „Zustandsbeschreibungen" beschreiben jedes Individuum bezüglich aller Prädikate; somit setzen sie sich aus elementaren Beschreibungen zusammen, welche ein Individuum mit einem Prädikat oder dessen Negation in Beziehung setzen. Darauf aufbauend werden die „Strukturbeschreibungen" eingeführt, die Vereinigungen solcher Zustandsbeschreibungen sind, die sich durch Permutation der Individuen ergeben. Nun kann man eine „Maßfunktion" m über den Zustandsbeschreibungen definieren, welche jeder Zustandsbeschreibung ein nichtnegatives reelles Gewicht zuweist, deren Gesamtheit sich zu eins aufsummiert. Diese Maßfunktionen lassen sich dann in kanonischer Weise als Gewichte auf Sätzen als Vereinigungen entsprechender Zustandsbeschreibungen auffassen. Weiterhin liefert dies dann eine „Bestätigungsfunktion" $c(h, e)$, welche als Quotient $m(h \cap e)/m(e)$ definiert ist[10] und somit den Grad misst, wie „stark" e (Erfahrungsdatum) h (Hypothese) impliziert. Insofern weist c Paaren von Sätzen Gewichte mittels des ursprünglichen m zu.

Jetzt stellt sich natürlich die Frage, welche Maßfunktion man anfänglich aussuchen soll. Im Sinne des klassischen Verständisses könnte man zum Beispiel die Maßfunktion wählen, die alle Zustandsbeschreibungen gleich bewertet, jedoch hat diese eine unerwünschte Eigenschaft. Zur Vereinfachung stelle man sich eine formale Sprache mit n Individuenkonstanten und lediglich einem Prädikat vor. Es soll nun mit Hilfe des Erfahrungsdatums, welches darin bestehe, dass $n - 1$ Individuen die betreffende Eigenschaft haben, die Hypothese bewertet werden, dass auch das letzte Individuum diese Eigenschaft teilt. Intuitiv würde man erwarten, dass dies in Abhängigkeit von n einen hohen Bestätigungsgrad nach sich ziehen müsste. Tatsächlich stellt man aber fest, dass dieser $c(h, e) = 1/2$ beträgt, was dadurch zustande kommt, dass es für das hier vorliegende e genau zwei Fortsetzungsmöglichkeiten gibt, welche gleich bewertet werden. Tatsächlich spielt die Anzahl n gar keine Rolle: Wie man sich leicht klarmacht, erhält man das gleiche Resultat unabhängig davon, welchen der n Individuen überhaupt das Prädikat zukommt, was bedeutet, dass insbesondere die Erfahrungsdaten „alle n Individuen haben die Eigenschaft" und „keines der n Individuen hat die Eigenschaft" die gleiche Bestätigung liefern. Dieser Sachverhalt lässt sich so beschreiben, dass in einem gewissen Sinne Lernen aus Erfahrung ausgeschlossen wird. Dies veranlasste Carnap dazu, eine andere Maßfunktion $\widetilde{m}$ einzuführen, welche seiner Meinung nach trotz ihrer Modifikation sehr natürlich sei: die Gleichverteilung auf allen Strukturbeschreibungen, die sich dann wieder unter den zugehörigen Zustandsbeschreibungen zu gleichen Teilen aufspaltet. Diese Vorgehensweise ermöglicht dann Lernen aus Erfahrung und vergibt größere Werte bei Gleichheit unter den Individuen, da Zustandsbeschreibungen mit Individuen, die eine größere Heterogenität bezüglich der Prädikate besitzen, öfters permutiert werden können, was die entsprechenden Gewichte verkleinert. Die wirkliche Rechtfertigung dieser Maßfunktion besteht also darin, dass sie eine nichttriviale Abhängigkeit vom Erfahrungsdatum zulässt; das wird jedoch auch von beliebig vielen anderen erfüllt,

[10] Hier bezeichne $e \cap h$ alle Zustandsbeschreibungen, die mit h und e kompatibel sind.

weshalb Carnap in „The continuum of inductive methods" [31] schließlich zum Kontinuum der Bestätigungsfunktionen $\{c_\lambda\}$ übergeht. Der reelle Parameter λ steuert in welchem Maße sich das Lernen vollzieht; je größer er ist, desto weniger spielen die Daten eine Rolle. Bei $\lambda = 0$ erhält man als Spezialfall das Analogon zur frequentistischen Vorgehensweise: Der Bestätigungsgrad entspricht der relativen Häufigkeit einer Eigenschaft unter den Individuen des Erfahrungsdatums. Dies soll uns nun für einen Eindruck von Carnaps Theorie genügen.

Logische Interpretationen verdeutlichen den idealtypischen Umgang mit Wissen, da Wahrscheinlichkeiten als Konzepte zur Wissensdarstellung auf logischen Abhängigkeiten basieren sollten. Es ist natürlich klar, dass formale Sprachen die Realität nicht in ihrer ganzen Fülle und nur stark abstrahiert darstellen können, was sich bei Carnap unter anderem daran zeigt, dass die Vertauschung der Individuen keinen Einfluss hat[11]. Das Fehlen einer kanonischen Maß- beziehungsweise Bestätigungsfunktion muss nicht als Defizit aufgefasst werden, sondern man kann es als Zeichen der Flexibilität deuten; Analoges gilt auch für den Umstand, dass man die Freiheit hat, eine geeignete formale Sprache zu wählen. Für Carnap befinden sich solche Fragestellungen jedoch außerhalb der Zielsetzung der induktiven Logik. Damit ist nochmals festzuhalten, dass die logische Interpretation der Wahrscheinlichkeit nicht den Anspruch hat, irgendetwas vorherzusagen, sondern sie möchte lediglich Beziehungen zwischen Sätzen formal korrekt darstellen; insofern gelingt es ihr auch, bei gegebener Maßfunktion jedwede Faktoren auszuschalten, die subjektiv oder willkürlich sein könnten. Keynes und Jeffreys werden oft als Subjektivisten eingeordnet, weil sie, wie Carnap selbst in [32] korrekt feststellt, unglückliche Formulierungen gewählt haben, wenn sie Wahrscheinlichkeit als „Grad des vernünftigen Glaubens" nahelegen[12]. Damit mag er Recht haben, doch zeigt dies, wie leicht man den Schritt von der logischen Anschauung zum Subjektivismus vollzieht, weshalb viele Anhänger desselben dazu neigen, gerade Carnaps Idee des Bestätigungsgrades für ihre Zwecke zu beanspruchen.

[11] Ein in dieser Hinsicht ausgereifterer Ansatz wurde zum Beispiel von Scott und Krauss in [127] entwickelt.

[12] Bei Carnap finden sich vermehrt Bemerkungen über den Subjektivismus, welchen er zwar noch nicht als überwunden einstuft, aber für bedeutungslos hält.

2.1.3 Frequentismus

Der Frequentismus, der hauptsächlich durch umfangreiche Arbeiten von VonMises, einem erklärten Positivisten[13], begründet wurde, erhebt den Anspruch eine objektive Interpretation des Wahrscheinlichkeitsbegriffes zu liefern, indem er eine enge Beziehung zwischen Wahrscheinlichkeiten und relativen Häufigkeiten, die direkt aus der Welt ablesbar sind, postuliert. Intuitiv lässt sich die Grundidee so beschreiben: Man liest aus einem wiederholten Zufallsexperiment eine bestimmte Frequenz ab und prognostiziert diese für weitere Ereignisse desselben „Typs". Wiederholungen sind einerseits bei den Beobachtungen notwendig, damit ihnen eine gewisse Signifikanz innewohnt, und andererseits auch bei den zukünftigen Ereignissen, da sich sonst die Frequenz gar nicht annähernd manifestieren kann. Die Theorie versucht damit, die erstmals von Laplace festgehaltenen Beobachtungen über das Phänomen der statistischen Stabilität adäquater zu beschreiben, als er es selbst tat.
Möchte man die existierenden Varianten des Frequentismus klassifizieren, so bieten sich hierzu zwei Kriterien an. Zum einen, ob man nur endliche Versuchsreihen[14] betrachtet oder sogar unendliche Wiederholungen zulässt, zum anderen, ob nur tatsächliche Ereignisse zählen oder auch hypothetische erlaubt sind, die ja dann eine Unendlichkeit erzeugen können. Wie man leicht einsieht, bleiben von a priori vier Varianten nur zwei relevant, da aktuelle Unendlichkeiten schlichtweg nicht existieren und hypothetische endliche Reihen suboptimal sind, weil man ja mehr Gehalt bei steigender Anzahl der Wiederholungen erwartet. Die aktuelle finitistische Sichtweise findet sich zum Beispiel bei Venn [234], wohingegen die hypothetisch infinitistische Auffassung durch VonMises [240] und Reichenbach [181] vertreten wird.

Wir wollen uns nun mit dem Frequentismus à la VonMises in seiner ursprünglichen Form beschäftigen; während er es für ein natürliches Vorgehen hielt, Wahrscheinlichkeiten über ein Limeskonzept zu definieren, entzündeten sich hieran schwerwiegende Einwände. In seinem Hauptwerk „Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit" [240] verwendet er die axiomatische Methode informell. Er führt zunächst das Kollektiv[15] ein, was eine unendliche Folge ist, so dass für jedes Element dieser Folge ein „Merkmal" in einem k-dimensionalen reellen Raum existiert, welcher als „Merkmalraum" bezeichnet wird. Das erste Axiom postuliert nun die Existenz von Grenzwerten in dem Sinne, dass für eine Menge A von Punkten im Merkmalraum deren Limes der relativen Häufigkeit im Kollektiv existiert: $\lim_{N\to\infty} N_A/N = W_A$. Ergänzend fordert das zweite Axiom, dass der Grenzwert unabhängig von der Anordnung der Reihe ist. Es seien A, B zwei disjunkte Mengen im Merkmalraum und W_A beziehungsweise W_B deren von null verschiedenener Grenzwert bezüglich des Kollektivs. Weiterhin sollen W'_A und W'_B für die Grenzwerte einer Teilfolge in einem modifizierten Kollek-

[13] Er veröffentlichte sein „Kleines Lehrbuch des Positivismus" [241].

[14] Die Bezeichnungen „Folge" und „Reihe" seien hier synonym verwendet, obwohl diese sich in mathematischer Verwendung eigentlich unterscheiden. Zudem bezeichnen sie ausschließlich unendliche Objekte, jedoch lassen wir sie hier auch in einer endlichen Variante zu.

[15] Das ist dann das, was VonMises unter „Wiederholungen" versteht.

tiv (Elemente, die kein zu A oder B gehöriges Merkmal haben, werden ausgesondert) stehen, die ohne Ausnutzung der Verschiedenheit von Merkmalen gebildet wurde. Dann soll $W'_A/W'_B = W_A/W_B$ gelten. Hierin spiegelte sich für VonMises die Zufälligkeit wider: Scheinbar irreguläre Anordnungen ergeben relativ betrachtet die gleiche Limesfrequenz[16]. Der Zahlenwert W_A ist dann bei Erfüllung der beiden Forderungen die Wahrscheinlichkeit relativ zu einem Kollektiv.
Die Kollektive werden in der Theorie als gegeben angenommen und daher nicht explizit konstruiert; es geht hauptsächlich darum, wie man mit diesen Kollektiven umgeht, das heißt, wie man neue Kollektive und damit auch neue Wahrscheinlichkeiten von bekannten ableitet. Diesem Vorgehen liegt die Ansicht zugrunde, dass es ähnlich wie in der theoretischen Physik nicht darum gehe, die Anfangsbedingungen zu bestimmen, sondern zu untersuchen, wie diese zu verschiedenartigen Bewegungen führen. In diesem Ansinnen standen als Grundoperationen folgende Manipulationen zur Verfügung: die Auswahl von Teilfolgen, die Mischung von Merkmalen, das Auslassen von Elementen und die Kombination von Kollektiven.
Wie bereits oben angedeutet wurde, widersprechen Wahrscheinlichkeiten für Einzelereignisse dem Grundanliegen des Frequentismus, weshalb VonMises darauf besteht, dass einer Wahrscheinlichkeit im Einzelfall niemals ein sinnvoller Gehalt zukommen kann. Er sagt hierzu, dass man unproblematisch die Wahrscheinlichkeit des Todeseintritts vor einem bestimmten Alter betrachten könne, indem man einfach den Grenzwert der relativen Häufigkeit aller Menschen nehme, die ein solches Schicksal ereilt; allerdings könne man niemals von dieser Wahrscheinlichkeit für eine *einzelne* Person sprechen, da sie einfach keine Bedeutung habe.
Für VonMises sind Wahrscheinlichkeiten also als Grenzwerte in zufällig angeordneten Kollektiven, die Beobachtungen in der Welt abstrahieren sollen, definiert. Er meinte, dass unendliche Folgen eine geeignete Modellierung der Beobachtungen darstellten, da man beim mehrmaligen Werfen eines Würfels den Eindruck habe, es gebe einen Grenzwert, der erst nach unendlich vielen Würfen erreicht werde. Doch wie kommt man an diese Wahrscheinlichkeiten? Er verweist ja bei der Konzeption auf Analogien zur Physik, doch dort besteht in vielen Fällen die Möglichkeit, die Anfangsbedingungen zu identifizieren. Dagegen können Wahrscheinlichkeiten, die auf unendlichen Versuchsreihen gründen, niemals endgültig verifiziert oder falsifiziert werden. Insofern liegt hier ein klarer Fall von unberechtigter Hypostasierung eines klar verständlichen Konzeptes, nämlich der relativen Häufigkeit, vor, weshalb damit VonMises bei der Benutzung von unendlichen Folgen als Kollektive ein gewisser Übereifer zu attestieren ist, der sich auch nicht vollständig problemlos mit seiner favorisierten Anschauung des logischen Empirismus vereinen lässt.
Es kommt hinzu, dass sich auch die zweite Forderung bei genauerer Betrachtung etwas problematisch gestaltet. Es trifft im Allgemeinen nicht zu, dass die relativen Häufigkeiten von beliebigen Teilfolgen gegen den gleichen numerischen Wert konvergieren müssen[17]. Man betrachte zum Beispiel die Folge, welche alternierend Erfolg

[16] Insbesondere soll $W_A = W'_A$ gelten, wenn B das Komplement von A ist.

[17] Es gilt sehr wohl, dass bei einer im mathematischen Sinne konvergenten Folge auch jede Teilfolge konvergiert, aber es geht hier nicht um die numerischen Werte der Folgenglieder, sondern um die

und Misserfolg liefert, formalisiert: $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$. Nun kann man für Teilfolgen jeweils Elemente auswählen, die einen Abstand von zwei zueinander aufweisen, so dass man die konstante Nullfolge und die konstante Einsfolge erhält, die offensichtlich verschiedene Limeswerte besitzen, nämlich null und eins. Dieser Einwand ist noch unzulässig, da die Verschiedenartigkeit der Merkmale ausgenutzt wurde, jedoch lässt dieses versuchte Gegenbeispiel schon vermuten, dass hier trotzdem noch einiges im Argen liegt, weshalb es nicht überraschend ist, dass das Konzept des Kollektivs noch weitere Modifikationen und Überarbeitungen erfuhr[18]. Damit muss hier bemerkt werden, dass ein etwas umständlicher und nicht völlig zweifelsfreier Ansatz gewählt wurde, womit es nicht überrascht, dass er sich in formaler Hinsicht nicht gegen die maßtheoretische Methodik von Kolmogorov durchsetzen konnte. Kollektive warfen mehr Fragen auf, als sie beantworten konnten; VonMises' Ansatz wird heute hauptsächlich als unausgegorene Theorie wahrgenommen.

Der finitistische Frequentismus begnügt sich stattdessen mit einem etwas simpleren Postulat: Die Wahrscheinlichkeit sei einfach die aus endlichen Beobachtungen stammende Frequenz. Dadurch wird der ganze Apparat der unendlichen Folgen mit beliebiger Stellenauswahl vermieden und Wahrscheinlichkeiten erhalten einen empirisch überprüfbaren Gehalt. In der weiteren Diskussion wollen wir Wiederholungen mittels „erzeugender Bedingungen" deuten: Man muss genau festlegen, in welchen Aspekten sich die einzelnen Zufallsexperimente gleichen sollen[19]. Dies nimmt dann in gewisser Weise den Lösungsvorschlag von Popper [171] zur Bereinigung der Unzulänglichkeiten des Frequentismus im Rahmen der Propensitätstheorie vorweg, auf den wir im nächsten Unterabschnitt nochmals zu sprechen kommen. Wir stellen uns nun die Frage, was ein auf Frequenzen basierender Wahrscheinlichkeitsbegriff überhaupt leisten kann.
Wenn man die Zuteilung von erzeugenden Bedingungen gewissenhaft vornimmt, merkt man, dass ein oft vorgetragener Kritikpunkt nicht zutrifft: Dadurch, dass die Frequenzen invariant unter Vertauschung der Reihenfolge der Beobachtungen sind, gehe die temporale Ordnung verloren und zeitliche Entwicklungen könnten nicht ausreichend berücksichtigt werden. Man stelle sich hierbei einen aus der Übung gekommen Bogenschützen vor, der nur etwas Training braucht, um wieder die alte Form

relative Häufigkeit von gleichartigen. Es ist unmittelbar klar, dass man bei einem Zufallsexperiment niemals erwartet, dass das Resultat konvergiert, da dies dann einem deterministischen Mechanismus gleichkäme.

[18]Tatsächlich sah es VonMises nicht als nötig an, diese selbst auszuführen. Der erste weitere bedeutende Beitrag zu Kollektiven kam von Wald mit „Zur Widerspruchsfreiheit des Kollektivbegriffes in der Wahrscheinlichkeitsrechnung" [247], welcher sich aber einer Kritik von Ville in „Etudes critique de la notion de collectif" [236] unterziehen musste.

[19]In einer deterministischen Anschauung wird niemals das gleiche Experiment wiederholt, da es sonst immer zum gleichen Ausgang führte; insofern ist hier eine Wiederholung bestimmter charakterisierender Eigenschaften gemeint. Dagegen ist es bei einer zugrunde liegenden indeterministischen Anschauung legitim, von exakter Wiederholung zu sprechen, da diese ja noch nicht das Resultat vorwegnimmt; allerdings ist zu bemerken, dass die Kontrolle sämtlicher auch noch so marginaler Faktoren niemals vollständig in menschlicher Hand liegt. Deshalb wollen wir im Weiteren von Experimenten sprechen, die einen großen Ähnlichkeitsgrad aufweisen, da dies beide Fälle beinhaltet.

zu erreichen, und einen Anfänger. Während Ersterer zum Beispiel bis zur Hälfte der Versuche keinen einzigen Treffer landet, aber danach konzentriert trifft, wechseln sich beim Anfänger die Treffer und Misserfolge alternierend ab. Beide haben schließlich die Frequenz 1/2, doch scheint es vernünftig, dem erfahreneren Bogenschützen eher die nächsten Treffer zuzutrauen als dem Anfänger. Hierbei ist einfach festzustellen, dass keine einheitlichen erzeugenden Bedingungen vorliegen; der Frequentismus möchte aber immer schon von einer Homogenität derselben ausgehen. Um dennoch eine relevante Teilfrequenz zu extrahieren, sind Entscheidungen notwendig, die von dem Verständnis der beurteilenden Person abhängen, was dem intendierten streng objektiven Charakter der Theorie widerspricht.
VonMises war kategorisch gegen eine Anwendung von Wahrscheinlichkeiten auf den Einzelfall, wohingegen Reichenbach und Venn es grundsätzlich erlauben. Dies ist aber mit einigen Schwierigkeiten verbunden, die wir uns nun klarmachen wollen; sie werden zeigen, dass sich das bevorzugte Anwendungsgebiet des Frequentismus tatsächlich im Wiederholungsfall offenbart.
Zunächst ist die Voraussage des Einzelfalles durch Wiederholungen insofern unzureichend, als dass deren Sinnhaftigkeit nicht unmittelbar empirisch überprüft werden kann: Im Einzelfall gibt es nur ein binäres Ergebnis, welches weit davon entfernt ist, eine nichttriviale Frequenz darzustellen. Notfalls kann das Ereignis durch eine überdurchschnittliche Wahrscheinlichkeit als erfolgreich vorausgesagt interpretiert werden; damit ist aber der genaue Wert in gewisser Weise überflüssig, solange man nur weiß, ob dieser größer als 1/2 ist. Beim Wiederholungsfall dagegen kann die volle Information einer Wahrscheinlichkeit zur Geltung kommen, weshalb sich das volle Potential des Frequentismus nur bei solchen Urteilen entfaltet.
Paradigmatisch für Einzelereignisse ist zudem das „Referenzklassenproblem": Auch wenn man sich damit abgefunden hat, dass die Frequenz nicht erneut im Einzelfall reproduziert werden kann, gibt es hierbei das zusätzliche Problem, dass bei den statistischen Daten nicht immer alle relevanten Faktoren in ihrer Gesamtheit erfasst werden, also man nur sehr grobe erzeugende Bedingungen garantieren kann. Bei den erfassten Ereignissen kann man aufgrund ihrer Anzahl davon ausgehen, dass sich die Restfaktoren ausgemittelt haben und sie damit eine grobe Richtlinie darstellen. Wenn man für eine größere Wiederholungsanzahl urteilt, kann man dieses Phänomen erneut erwarten. Wenn aber ein Einzelfall zu erfassen ist, kann man davon ausgehen, dass dieser in vielen Aspekten vom Durchschnitt abweichen wird. Ein Beispiel mag dies verdeutlichen. Man fragt nach der Lebenserwartung einer bestimmten Person, die regelmäßig Zigaretten konsumiert und demnach als Raucher einzustufen ist. Möchte man nun statistische Daten zur Beantwortung der gestellten Frage verwenden, so stellt man notgedrungen fest, dass sich die Personen, welche in den Statistiken geführt werden, in vielen Eigenschaften unterscheiden: Etwa differiert der Tageskonsum beträchtlich von dem der Zielperson oder die Lebensführung unterscheidet sich eklatant. Das Problem besteht darin, dass Menschen, die in allen relevanten Aspekten der Zielperson gleichen, sehr schwer zu finden sind, weshalb man sich in statistischen Datenerhebungen auf grobe Analogien, wie etwa hier dem Vorliegen von Nikotinkonsum, stützen muss. Damit ist hier eine intrinsische Limitie-

rung der empirischen Vorgehensweise erkennbar, da man sich vernünftigerweise nicht nur mit teilweisen Übereinstimmungen zufriedengeben möchte. Vielmehr hat man die berechtigte Vermutung, dass auch weitere Faktoren eine Rolle spielen müssen, weshalb es unumgänglich ist, dass externe Informationen einbezogen werden. Es bleibt aber zu erwähnen, dass das Referenzklassenproblem nicht immer auftreten muss: Gerade bei naturwissenschaftlichen Experimenten kann man eine zufriedenstellende Reproduzierbarkeit garantieren. Dies hängt aber damit zusammen, dass die betrachteten Systeme in ihrem Komplexitätsgrad deutlich unter dem von Menschen liegen. Es sollte klar sein, dass sich Ereignisse, die genuin menschliche Eigenschaften involvieren, nie exakt reproduzieren lassen, da Menschen einzigartig sind und eine zeitliche Evolution jeden Menschen verändert.
Weiterhin ist die Interpretation der extremen Wahrscheinlichkeit null und eins problematisch. In anderen Wahrscheinlichkeitskonzeptionen bezeichnen diese Tautologien beziehungsweise Unmöglichkeiten, was hier aber nicht gilt. Wenn zum Beispiel eine faire Münze bei einem einzigen Wurf Zahl gezeigt hat, bedeutet dies noch lange nicht, dass sie jetzt immer Zahl zeigen wird beziehungsweise Kopf ausgeschlossen ist. Üblicherweise versucht man dies zu umgehen, indem man immer die Forderung nach einer genügend großen Wiederholungsanzahl hochhält; jedoch werden bei einer bedeutend größeren Anzahl an alternativen Ausgängen dennoch manchmal Ereignisse, welche logisch möglich sind, ungerechtfertigt aufgrund der relativen Häufigkeit ausgeschlossen.
Wenn die Wahrscheinlichkeit der relativen Häufigkeit entsprechen soll, stellt sich die Frage, wie viele Wiederholungen man durchführen soll, wenn man die Möglichkeit hat, deren Anzahl zu bestimmen. Grundsätzlich scheint aufgrund der klassischen Beispiele der Geburtsraten und Lebenserwartungen der Konsens zu herrschen, dass relative Häufigkeiten umso gehaltvoller sind, je mehr Beobachtungen sie berücksichtigen; dennoch muss festgestellt werden, dass die Wahrscheinlichkeit in willkürlicher Weise von der Anzahl der Beobachtungen abhängt. Wenn man etwa für eine Münze die „intuitive" Wahrscheinlichkeit 1/2 erhalten möchte, darf man nur eine gerade Anzahl von Versuchen ausführen[20]. Das ist ein Problem in dem Sinne, als dass die Zuweisungen damit nur grobe Richtlinien vorgeben können. Trotz aller Defizite des klassischen Frequentismus gab es bei ihm durch die Betrachtung von unendlich vielen Folgengliedern keine willkürlich festgelegte Schranke.
Dies leitet uns auch gleich zu einer weiteren Frage über: Wie kann man von einer Wahrscheinlichkeit sprechen, wenn gar keine Frequenz eines vergleichbaren Ereignisses vorliegt? Dies ist tatsächlich ein unüberwindbares Hindernis und stellt den schwerwiegendsten Kritikpunkt an der frequentistischen Auffassung dar. Ein Behelf mittels hypothetischer Frequenzen kann nur als Spekulation bewertet werden und scheint eher ein Indiz dafür zu sein, dass ein anderes Verständnis von Wahrscheinlichkeiten angebracht ist.

Zusammenfassend können wir feststellen, dass sich der klassische Frequentismus

[20]Dieses Problem ist unter der Bezeichnung „Granularität" bekannt.

mit seinen unendlichen Folgen zu stark von seinen empirischen Ursprüngen distanziert und zudem technisch unausgegoren ist. Vielversprechender ist die Deutung von Wahrscheinlichkeiten als beobachtete relative Häufigkeit, jedoch kann die Forderung, immer die beobachtete Frequenz als Wahrscheinlichkeit zu übernehmen, nur als grob bezeichnet werden, da zur Feinjustierung weitere Faktoren notwendig sind, die über das bloße Ablesen von relativen Häufigkeiten hinausgehen. Der Frequentismus hat seine Wurzeln in der Stabilität der relativen Häufigkeit und versucht dies geeignet zu formalisieren, jedoch verlässt er bei der Voraussage von Einzelereignissen sein eigentliches Terrain.

2.1.4 Propensitätsinterpretationen

Eine weitere objektive Interpretation erklärt Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe von „Propensitäten”. Es lassen sich detaillierte Unterscheidungen zwischen den Begriffen „Neigung”, „Tendenz” und „Propensität” treffen, doch wollen wir diese fortan synonym im Sinne eines dispositionalen Verhaltens verwenden und keine spezielle Analyse dieser Begriffe voraussetzen[21]. Popper ließ seine Theorie [170] auf einer Konferenz vorstellen, die er selbst nicht besuchte, nämlich 1957 in Bristol von seinem damaligen Schüler Feyerabend[22]. Der Hauptgrund, der zum Entstehen dieser Anschauung führte, war das Bestreben Poppers, Wahrscheinlichkeiten im Einzelfall eine sinnvollere Bedeutung als im Frequentismus zu geben, was vornehmlich durch die Quantenmechanik motiviert war, welche Einzelereignissen in scheinbar selbstverständlicher Weise Wahrscheinlichkeiten zuschreibt.
Auf dem Weg, einen „verbesserten Frequentismus” zu kreieren, bestand ein wichtiger Schritt in dem Übergang von Kollektiven zu erzeugenden Bedingungen. Eigentlich dachte er, man könne, falls man sich von der Zielvorstellung, die Wahrscheinlichkeiten erneut in Frequenzen zu finden, befreie, einfach die Wahrscheinlichkeit des Kollektivs für eine einmalige Instanziierung des Ereignisses übernehmen; doch er selbst entdeckte, dass dies nicht ausreichen würde. Man stelle sich ein wiederholtes Werfen eines fairen Würfels vor, bei dem einmal ein gezinkter Würfel eingestreut wird, der aufgrund seines verschobenen Masseschwerpunktes andere physikalische Eigenschaften hat. Nach seinem Vorschlag würde der gezinkte Würfel beim Wurf die gleichen Wahrscheinlichkeiten wie der faire haben, da er Teil des Kollektivs ist. Die Lösung hierauf formulierte er in [171] so: „All this means that the frequency theorist is forced to introduce a modification of his theory - apparently a very slight one. He will now say that an admissible sequence of events (a reference sequence, a „collective”) must always be a sequence of repeated experiments. Or more generally, he will say that admissible sequences must be either virtual or actual sequences which are *characterised by a set of generating conditions*- by a set of conditions whose repeated realisation produces the elements of the sequences.”. Der hier vollzogene Übergang von Kollektiven auf erzeugende Bedingungen kann aber nur als natürlich bezeichnet werden, denn so schreibt beispielsweise Eagle in [56]: „Popper introduces the view as the inevitable consequence of a natural thing that the frequentist (at least the frequentist who wants to interpret standard scientific practice) should like to say: . . . ”. Für ihn war es aber wichtig, dies deutlich zu formulieren, da Wiederholungen zu seiner Zeit immer noch stark mit den Ansichten von VonMises assoziiert wurden.
Doch das ist nicht die einzige Neuerung der Theorie, denn weiterhin müssen im Gegensatz zum Frequentismus nun keine Frequenzen vorliegen, um legitim über Wahrscheinlichkeiten sprechen zu können. Die grundlegende Überzeugung besteht darin, dass physikalischen Systemen eine Tendenz innewohnt, abhängig von den äußeren

[21] Derartige Analysen finden sich etwa bei Martin [151], Mumford [161], Shoemaker [204], Prior [110] und Lewis [142].

[22] Offenbar war seine eigene Propensität, die Veranstaltung zu besuchen, nicht groß genug.

Bedingungen ein gewisses Verhalten zu manifestieren. Er gibt dazu das folgende Beispiel: Etwa hat eine Münze beim Werfen auf einem mit Spalten versehenen Tisch eine andere Tendenz, Ergebnisse zu liefern, als auf einem flachen Tisch, da es möglich ist, dass sie in einer der Spalten stecken bleibt. Es ist zu bemerken, dass es eigentlich in einem vortheoretischen Verständnis möglich ist, gewisse Tendenzen auf Wahrscheinlichkeiten zurückzuführen, doch hier wird der umgekehrte Weg gegangen, indem man versucht Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe des als fundamentaler vermuteten Begriffes der Propensität zu erklären. In dieser Denkweise haben physikalische Systeme im Wiederholungsfall die Neigung, eine gewisse Frequenz zu manifestieren, welche dann als Wahrscheinlichkeit betrachtet wird; im Einzelfall sind die Dispositionen zur Produktion eines bestimmtes Resultats zu einer spezifizierten Gelegenheit schon die Wahrscheinlichkeiten selbst. Da rein dispositionelle Anlagen im Vordergrund stehen, ist das Vorhandensein von tatsächlichen Frequenzen inessentiell.
Popper entwarf also seine Interpretation ursprünglich, um sowohl mit Wiederholungen[23] als auch Einzelfällen umgehen zu können. Allerdings wird die Theorie bezüglich Einzel- und Wiederholungsfall gesondert ausgearbeitet. Die Propensitätstheorie im Einzelfall zählt als Hauptvertreter Giere [79] [80], Fetzer [65] [66] [67] und Miller [157] [158] zu sich, während sie im Wiederholungsfall durch Hacking [88] und Gillies [83] repräsentiert wird. Die Theorie für den Einzelfall lässt sich noch genauer ausdifferenzieren[24]: Miller und Popper, besonders in seinem Buch „Eine Welt voller Propensitäten" [174], sind der Ansicht, dass Propensitäten Eigenschaften der vollständigen physikalischen Situation sind, wohingegen Fetzer sie nur von den relevanten Bedingungen abhängen lässt. Der Unterschied zwischen den Einzelfalltheorien besteht in gewisser Weise in der Frage, ob es reicht, ausgesuchte Faktoren zu berücksichtigen, oder jede Einzelheit des Universums bei Veränderungen einen Beitrag leistet, was natürlich sehr schwer empirisch zu überprüfen ist.

Wie sich die Situation darbietet, versucht man Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe von Tendenzen in dem Sinne zu erklären, dass man diese auf etwas Fundamentaleres zurückführt. Diese Propensitäten können mit Wahrscheinlichkeiten übereinstimmen, müssen es aber nicht: Etwa werden sie im Einzelfall im ursprünglichen Ansinnen Poppers oft miteinander identifiziert, wohingegen dies bei Wiederholungen eher die Ausnahme darstellt (ein Würfel besitzt eine starke Propensität, gerade Zahlen mit der Wahrscheinlichkeit von ungefähr 1/2 zu zeigen). Die Propensitätstheorie verbindet Elemente des Frequentismus mit ihrer eigenen Interpretation von auf Dispositionen gründenden Wahrscheinlichkeiten, um eine ausgereiftere Deutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes zu etablieren. Allerdings muss sie sich den folgenden Kritikpunkten stellen.
Die weitverbreitetste Deutung von Propensitäten vollzieht sich als eine Art schwache Kausalität, jedoch ist diese Anschauung mit dem Humphreys' Paradox konfron-

[23]Popper spricht sich hierbei nicht eindeutig für unendliche oder endliche Sequenzen aus.

[24]Eigentlich kann man hier noch Mellors „Distribution Display Account" [154] [155] zuordnen, aber wir wollen hier davon Abstand nehmen, da es sich um einen Hybridansatz handelt, der Propensitäten mit subjektiven Wahrscheinlichkeiten verquickt.

tiert, das erstmals von Salmon [188] erwähnt wurde. Es ist charakteristisch, dass kausalen Mechanismen eine temporale Orientierung zukommt: Effekte folgen zeitlich immer auf Ursachen. Nun möchte man aber Wahrscheinlichkeiten oft im Sinne konditionierter Wahrscheinlichkeiten anwenden, welche einen hypothetischen Informationsgewinn kodieren[25]. Wenn ein zweistufiges Zufallsexperiment, in welchem die erste Stufe zeitlich vor der zweiten situiert ist, vorliegt und auf Ausgänge der ersten Stufe bedingt wird, gibt es keinerlei Probleme. Allerdings ist es geradezu üblich, konditionierte Wahrscheinlichkeiten zu betrachten, in denen zur Geltung kommende Ereignisse *gleichzeitig* passieren. Man denke nur an einen Würfelwurf, bei dem man sich für die Wahrscheinlichkeit einer sechs unter der Annahme, dass eine gerade Zahl geworfen wurde, interessiert[26]. Welche Art von Kausalität sollte hier wirken? Noch verwirrender wird es, wenn man mit Hilfe von Informationen aus der zweiten Stufe des erwähnten Zufallsexperimentes Mutmaßungen über den Ausgang der ersten Stufe anstellen möchte. Dementsprechend müsste es eine Art Rückwärtskausalität geben, die aber vernünftigerweise nur als Spekulation einzustufen ist. Das Paradox zeigt somit, dass der Versuch, Propensitäten für die in Kapitel 1 Abschnitt 1 genannten Zwecke einzusetzen, aufgrund ihrer streng physikalischen Interpretation fehlschlägt. Wenn man versuchte, die Theorie mittels einer sehr freien Auslegung von Tendenzen zu retten, müsste man sich zu Recht fragen, wie viel von dem ursprünglichen Ansinnen übrig bliebe. Wahrscheinlichkeiten sollten eine in einem epistemischen Sinne allgemeinere Bedeutung haben, welche über die von physikalischen Neigungen aller Arten hinausgeht.
Und wenn man sich schon auf Dispositionen eines physikalischen Systems beziehen möchte, dann muss man auch konsequent sein. Dies bedeutet aber, dass im Fall der Gültigkeit der metaphysischen These des Determinismus alle Propensitäten trivial sind, also dass diese nur zwei unterschiedliche Ausprägungen annehmen können. Abstufungen von Propensitäten, welche ja durch quantenmechanische Phänomene motiviert waren, kann es nur bei indeterministischen Sachverhalten geben. Diese Auffassung von Wahrscheinlichkeiten steht wiederum im Widerspruch zu unserem in Kapitel 1 Abschnitt 1 explizierten prototheoretischen Verständnis.
Die Propensitätstheorie hat den Anspruch, eine objektive Interpretation des Wahrscheinlichkeitsbegriffes zu liefern. Das gelingt ihr insofern besser als dem Frequentismus, als dass die tatsächliche physikalische Beschaffenheit der Dinge berücksichtigt wird, ohne sich blind auf irgendwelche Frequenzen zu verlassen. Allerdings ist ausgehend von der Interpretation von Wahrscheinlichkeiten als Disposition im Einzelfall keinesfalls klar, welche Eigenschaften ihre formalen Beschreibungen erfüllen sollten[27]; es gibt keinerlei Möglichkeit, ihnen empirisch Zahlenwerte zuzuweisen[28].

Auch wenn der Propensitätstheorie aufgrund der genannten Einwände gewisse Ein-

[25] Dazu mehr in Abschnitt 4 dieses Kapitels.

[26] Das ist ein Beispiel von Milne [159].

[27] Demnach hat die Propensitätstheorie in Abschnitt 2 dieses Kapitels, wo wir zeigen werden, dass die anderen Interpretationen ausnahmslos zu den Kolmogorovaxiomen führen, keinen Auftritt.

[28] Dies wird unter anderem in [56] thematisiert.

schränkungen für epistemtische Zwecke obliegen, ist der wertvolle Beitrag, den man ihr entnehmen kann, dass man in sinnvoller Weise von objektiven Wahrscheinlichkeiten in dem Verständnis sprechen kann, dass sie sich von physikalischen Eigenschaften ohne die Existenz einer entsprechenden relativen Häufigkeit ableiten lassen; in diesem Sinne sind sie kontrafaktisch robust. Während der Frequentismus mit der Manifestation einer relativen Häufigkeit zufrieden ist und in ihr schon die Wahrscheinlichkeit sieht, erläutern Dispositionen objektiv deren modale Konstituenten[29].

[29]Hiermit wird auch der Grund angesprochen, warum sich der Frequentismus so schwer dabei tut, den Satz von Bernoulli zu interpretieren: Die Frequenzen, die man beobachtet, sind nicht Teil einer höherstufigen aktuellen relativen Häufigkeit.

2.1.5 Bayesianismus

Die subjektive Interpretation der Wahrscheinlichkeit wurde zuerst von Ramsey in seinem „Truth and Probability" [180] von 1926 ausgearbeitet, wobei DeFinetti, der heute vornehmlich damit assoziiert wird, ein wenig später (1937) in [44] seine ersten substantiellen Beiträge dazu lieferte. Zentraler Bestandteil dieser Auffassung ist die Deutung von Wahrscheinlichkeiten als Glaubensgrade. Damit ist unmittelbar klar, dass die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis von Mensch zu Mensch unterschiedlich eingestuft werden kann, was dann auch DeFinetti zu seiner bekannten und kontrovers diskutierten Behauptung „Probability does not exist!" führte. Auch wenn sich das zunächst aus heutiger Sicht, welche zunehmend durch die Vorstellung einer umfassenden objektiven Quantifizierbarkeit geprägt ist, etwas seltsam präsentiert, so muss doch bemerkt werden, dass sich diese Interpretation historisch betrachtet stärker an der ursprünglichen Bedeutung des Wortes „wahrscheinlich" orientiert, wie sie sich durch die Jahrhunderte zog[30]. Wahrscheinlichkeit bezog sich ursprünglich darauf, wie sehr man der Aussage eines anderen Menschen trauen konnte, was insbesondere bei juristischen Fragen eine Rolle spielte. Erst allmählich mit dem strukturierten Aufkommen der Naturwissenschaften erweiterte sich das Verständnis insoweit, dass man auch die Natur mittels Experimenten zu Aussagen zwingen kann, die im Wesentlichen wie bei Menschen auch unzuverlässig sein können.

An sich steht es ja jeder Person frei zu glauben was sie möchte, aber wenn sich dies in unkontrollierter Weise vollzieht, kann das zu unerwünschten oder absurden Konsequenzen führen, falls man diese Glaubensgrade als Basis für Handlungen wählt. Wie von Ramsey vorgeschlagen, sollen diese behavioristisch mittels dem Wettverhalten einer Person gemessen werden, wobei die Glaubensgrade akzeptablen Wettraten, dem Verhältnis von Einsatz und möglichem Gewinn, entsprechen. Eine irrationale Zuweisung von Wettraten liegt vor, wenn einer Person von einem Buchmacher, der über den gleichen Wissensstand verfügt[31], ein Wettangebot offeriert werden kann, das sie unabhängig von dem jeweiligen Ausgang des Wettereignisses immer verlieren lässt; ein solches Angebot wird dann als „Dutch Book" bezeichnet. Falls ein derartiges Wettsystem nicht möglich ist, so nennt man die Glaubensgrade einer Person „kohärent". Dieses Konzept wurde ursprünglich von DeFinetti und Ramsey geprägt, wobei zu bemerken ist, dass diese Art von Konsistenz heute als „schwache Kohärenz" benannt wird; bei der von Shimony[201] und Kemeny [123] ausgearbeiteten „strikten Kohärenz"wird nicht nur verlangt, dass es keinen garantierten Verlust geben darf, sondern dass abhängig vom Ausgang des Ereignisses auch ein Gewinn möglich sein muss. Das Rationalitätspostulat der Kohärenz im ursprünglichen Sinne stellt die erste wichtige Säule des Subjektivismus dar.

Weiterhin legt der Subjektivismus großen Wert auf die Regel von Bayes [11], welche beschreibt wie man die Konditionierung auf ein Ereignis, also die Adjustierung der

[30] Dies wird in „The emergence of probability" [89] geschildert.

[31] Es ist wichtig zu betonen, dass der Buchmacher durch keine für die Wette relevante Information bevorteilt ist. Beispielsweise wäre dies verletzt, wenn auf ein bereits geschehenes Ereignis gewettet würde, dessen Ausgang allein dem Buchmacher bekannt ist.

Wahrscheinlichkeiten durch einen Informationszuwachs, geeignet berechnen kann. Deshalb ist es auch üblich für diese Anschauung neben Subjektivismus und Personalismus die Bezeichnung Bayesianismus zu gebrauchen. Allerdings muss man sich fragen, warum gerade der Subjektivismus den alternativen Namen Bayesianismus für sich beanspruchen kann, da doch auch anderen Anschauungen der Weg zu der Regel von Bayes offensteht. Der springende Punkt besteht darin, dass der Subjektivismus es im Gegensatz zu Standardstatistikverfahren, die man abgrenzend der Denkschule des Frequentismus zurechnet, für methodisch sinnvoll hält, basierend auf einer initialen Wahrscheinlichkeitsverteilung, welche womöglich auf rein subjektiven Einschätzungen beruht, eine neue mit Hilfe von zu Tage geförderten Information zu erschaffen. Das ist das typische Merkmal: Man bildet sich zuerst seine Meinung und ändert sie dann aufgrund des Ausgangs eines bestimmten Ereignisses ab[32].
Weil es sich beim Bayesianismus bei alleiniger Respektierung der Kohärenz und Bayeskonditionalisierung um eine sehr flexibel auslegbare Form der Epistemologie handelt[33], sind weitere Rationalitätspostulate notwendig, die Orientierung bei einer gewissenhaften Zuweisung von Wahrscheinlichkeit geben können, da ein vernünftiger Glaube sich nicht nur vor der Logik, sondern auch Tatsachen verantworten muss. Zunächst einmal halten es einige Personalisten[34] für sinnvoll, extreme Wahrscheinlichkeiten nur für Tautologien und logische Widersprüche zu vergeben. Der Hintergrund ist, dass triviale Wahrscheinlichkeiten unverändert unter Konditionierungen bleiben, weshalb das erwähnte Vorgehen, welches als Einhaltung der „Regularität” bezeichnet wird, garantiert, dass man sich durch Beweise vom Gegenteil überzeugen lassen kann. Eine weit verbreitete Art der Rationalitätskriterien im gemäßigten Bayesianismus sind neben dem Prinzip vom unzureichenden Grund[35] die sogenannten „Expertenzuweisungen” beziehungsweise „Expertenwahrscheinlichkeiten” [36]. Es geht hierbei, wie der Name schon nahelegt, darum, dass man seinen Glaubensgrad an die Wahrscheinlichkeit einer vertrauenswürdigen Quelle anpasst[37], welche vielfältiger Natur sein kann.
Nun führt die Verwendung unterschiedlicher Expertenwahrscheinlichen zu verschiedenen Rationalitätskriterien, zu deren bedeutendsten wohl Lewis' „Principal Principle” und VanFraassens „Reflektionsprinzip” zählen. Lewis [139] sieht die Zuweisungen mit Hilfe einer objektiven Wahrscheinlichkeitsinterpretation als Maßstab an[38]. In dem Spezialfall, dass die objektive Wahrscheinlichkeit gerade die relative Häufigkeit darstellt, erhält man das „Prinzip der direkten Wahrscheinlichkeit” und der

[32]Hierauf gehen wir noch detaillierter in Abschnitt 2 von Kapitel 6 ein.

[33]Diese Art wird oft als orthodoxer Bayesianismus bezeichnet, welcher inbrünstig von DeFinetti vertreten wurde.

[34]Kemeny [123], Edwards et al. [60], Shimony [202], Stalnaker [220].

[35]Mit Befürwortern wie zum Beispiel Jeffrey [113] und Jaynes [112].

[36]Gaifman prägte diese Bezeichnungen in [72].

[37]Diese Übernahme muss sich nicht auf einzelne Wahrscheinlichkeiten beschränken, sondern kann alle Glaubensgrade für die Ereignisse einer bestimmten Situation abdecken, wobei man dann von einer „Expertenfunktion” spricht. Wenn diese dann auch noch für *alle* möglichen Situationen, mit denen ein epistemisches Subjekt konfrontiert werden kann, gilt, wird sie zu einer „universellen Expertenfunktion”.

[38]Tatsächlich wurde ein ähnliches Prinzip bereits von Mellor [154] aufgestellt.

zugehörige Vorgang wird oft als „calibration" bezeichnet[39]. Falls man stattdessen den Grenzwert einer relativen Häufigkeit in einer kontrafaktischen unendlichen Folge setzt, so spricht man vom sogenannten „Reichenbach Axiom". Einen anderen von Goldstein [84] initiierten Aspekt beleuchtet VanFraassen [231] [233], indem er die Vorgabe der eigenen zukünftigen Wahrscheinlichkeitseinschätzungen als maßgeblich betrachtet: Wenn man weiß, welche Wahrscheinlichkeit man einem Ereignis zu einem zukünftigen Zeitpunkt zuweist, dann sollte man dies schon jetzt tun. Hierbei handelt es sich um ein sogenanntes „autoepistemisches Prinzip".

[39] Neben Hacking [88] zählen auch VanFraassen [231] und Shimony [203] zu den Befürwortern.

2.2 Formale Beschreibung von Wahrscheinlichkeiten

2.2.1 Kolmogorov-Axiome und die Formel von Bayes

Nun werden wir die wohlbekannten Kolmogorov-Axiome [125], welche erst ungefähr dreihundert Jahre nach der Pascal-Fermat-Korrespondenz aufgestellt wurden, zusammen mit der Definition konditionierter Wahrscheinlichkeiten und der einflussreichen Formel von Bayes [11] vorstellen. Es sei eine nichtleere Menge W, der „Ergebnisraum", gegeben, welche in der relevanten Anwendung immer eine Partitionierung in mögliche Welten modelliert; ihre Teilmengen werden als „Ereignisse" bezeichnet. Wir haben uns bereits anfänglich dafür ausgesprochen, dass wir vernünftigerweise nur endliche Ergebnisräume betrachten werden. Weiterhin ist nun eine „Algebra" $\mathcal{A}$ auf W zu wählen, welche eine Menge von Ereignissen aus W ist, die W selbst beinhaltet sowie unter Komplementbildung und Vereinigung abgeschlossen ist. Eine kanonische Wahl hierfür stellt die Potenzmenge von W, also die Menge aller Teilmengen, dar und in dem Fall eines endlichen W gibt es keine Gründe, die gegen sie sprechen. Ein „Wahrscheinlichkeitsmaß" P ist dann eine Funktion von $\mathcal{A}$ in die reellen Zahlen, die den folgenden Axiomen genügt:

1. $P(A) \geq 0 \,\forall\, A \in \mathcal{A}$

2. $P(W) = 1$

3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ falls $A, B \in \mathcal{A}$ disjunkt sind.

Das Tripel aus Ergebnisraum, Algebra und Wahrscheinlichkeitsmaß nennt man dann einen „Wahrscheinlichkeitsraum". Die Funktionswerte von P werden gemeinhin als Wahrscheinlichkeiten bezeichnet. Aus den Axiomen ergibt sich unmittelbar, dass die Funktionswerte von P nur im Intervall $[0,1]$ liegen können und die Werte von nichttrivialen Ereignissen durch die Summe der Funktionswerte der zugehörigen Einzelelemente festgelegt werden.

Das für ein gegebenes Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $B \in \mathcal{A}$ „bedingte" oder auch „konditionierte Wahrscheinlichkeitsmaß" $P(\cdot|B)$ ist wiederum eine Funktion von $\mathcal{A}$ in die reellen Zahlen[40], die für Teilmengen $A \in \mathcal{A}$ durch

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

[40] Alternativ kann man, um die Relativierung auf eine spezielle Bezugsproposition zu vermeiden, ein bedingtes Wahrscheinlichkeitsmaß als Abbildung von einer Popperalgebra $\mathcal{A} \times \mathcal{F}'$ mit $\mathcal{F}' = \{U \in \mathcal{A} : P(U) \neq 0\}$ nach $[0,1]$ auffassen. Diese Bezeichnung geht auf Popper zurück, welcher als Erster bedingte Wahrscheinlichkeiten als Grundkonzept einer Wahrscheinlichkeitstheorie ergründete. Eine Popperalgebra ist im Allgemeinen eine Menge $\mathcal{F} \times \mathcal{F}'$ von Teilmengen des kartesischen Produktes $W \times W$ mit den Eigenschaften, dass $\mathcal{F}$ eine W-Algebra und $\mathcal{F}'$ eine nichtleere Teilmenge derselben ist, wobei $\mathcal{F}'$ bezüglich Obermengen abgeschlossen ist (also wenn V' aus $\mathcal{F}'$ in einer Menge V aus $\mathcal{F}$ enthalten ist, so gilt $V \in \mathcal{F}'$).

definiert ist, falls $P(B) > 0$ gelten sollte. Der Name „konditioniertes Wahrscheinlichkeitsmaß" war insofern gerechtfertigt, als dass es sich hier wiederum um ein Wahrscheinlichkeitsmaß im ursprünglichen Sinne handelt, wie man sich leicht klarmacht.
Unter Verwendung dieses Formalismus lässt sich die grundsätzliche Struktur der Expertenzuweisungen im Bayesianismus als

$$P(A|p(A) = x) = x$$

schreiben, wobei P für das Wahrscheinlichkeitsmaß des epistemischen Subjektes und p für das Expertenwahrscheinlichkeitsmaß steht. Das soll in dem Verständnis gelten, dass man es nur anwendet, wenn $P(p(A) = x) > 0$ gilt, also wenn man der Expertenzuweisung positive Wahrscheinlichkeit einräumt. Vor dem Hintergrund, dass im Englischen das Wort „chance" zumeist für objektive Wahrscheinlichkeiten steht und der subjektive Glauben als „credence" bezeichnet wird, hat Lewis' Principal Principle die Darstellung $C(A|ch(A) = x) = x$ mit den naheliegenden Abkürzungen. Zudem lässt sich das Reflektionsprinzip unter der Einführung eines Zeitparameters als $C_{t_1}(A|C_{t_2}(A) = x) = x$ darstellen, wobei t_1 und t_2 zwei Zeitpunkte mit $t_1 < t_2$ bezeichnen.
Es mag schon aufgefallen sein, dass bei der Formulierung der Expertenprinzipien wiederum Wahrscheinlichkeitszuweisungen im Argument von Wahrscheinlichkeiten auftauchen. Hierbei spricht man von „Wahrscheinlichkeiten höherer Ordnung" und diese haben einen etwas zweifelhaften Status inne. Die Begründer des Bayesianismus waren nicht gerade Verfechter dieser Konzeption: DeFinetti lehnte sie aufgrund seiner radikal subjektivistischen Sichtweise ab, Savage [190] zieht sie als theoretische Möglichkeit in Betracht, aber verwirft sie schließlich, und Ramsey verliert kein Wort über sie; zudem können sie in vereinzelten Fällen logische Widersprüche herbeiführen. Für sie hat sich aber unter anderem Skyrms [206] ausgesprochen.
Es ist zu bemerken, dass sich ein Bezug auf eine weitere Wahrscheinlichkeit beim wohl am häufigsten angewendeten Spezialfall, dem Prinzip der direkten Wahrscheinlichkeit, vermeiden lässt, da man als Eingabe „nur" eine Frequenz hat. In der bayesianischen Auffassung ist die Wahrscheinlichkeit ein Glaubensgrad. Was lediglich interessiert, ist eine relative Häufigkeit; wie diese in subjektive Glaubensgrade einfließt, bleibt jedem selbst überlassen. Gleiches gilt bei der Bedingung auf Propensitäten. Demnach ist es viel interessanter, wenn die Expertenzuweisung aus einem Glaubensgrad einer Person besteht. Insofern es sich nur um Glaubensgrade von Individuen handelt, die sich von dem Anwender unterscheiden, sind es in dem Sinne keine Wahrscheinlichkeiten, als dass der Glaubensgrad auf ein epistemisches Subjekt relativiert wird. Damit können wir festhalten, dass keine echten Wahrscheinlichkeiten höherer Ordnung vorliegen, solange nicht die eigenen Glaubensgrade ins Spiel kommen. Dies ist genau der interessante Fall, der beim Reflektionsprinzip vorliegt. Nicht nur bezieht man sich auf die eigenen Glaubensgrade, sondern es sind auch noch die zukünftigen. Während man den Nutzen der anderen Expertenprinzipien leicht intuitiv erfassen kann, ist der Anwendungsbereich des Reflektionsprinzips nicht ganz so offensichtlich. Deshalb werden wir in Kapitel 4 Unterabschnitt 1.6 dessen Be-

gründung im Zusammenhang mit Dutch-Book-Argumenten besprechen.

Mit Hilfe von bedingten Wahrscheinlichkeiten lässt sich dann direkt die Formel von Bayes ableiten, welches die Umkehrung der Konditionierungsreihenfolge beschreibt:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Bei einer Partitionierung des Ergebnisraumes in disjunkte Alternativen $A_1, \ldots, A_n$ kann der Nenner in Analogie mit dem Zähler wie folgt ausgeschrieben werden:

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}$$

Hierbei werden im Bayesianismus die $P(B|A_i)$ als „Likelihoods" und die $P(A_i)$ als „Priorwahrscheinlichkeiten" bezeichnet. Die methodische Anwendung dieser Formel im Bayesianismus ist wie folgt zu verstehen: Die Priorwahrscheinlichkeiten und Likelihoods werden bezüglich eines Wahrscheinlichkeitsmaßes P_1 gebildet, welches den epistemischen Zustands eines Subjektes zum Zeitpunkt t_1 beschreibt. Vollzieht sich bis zum späteren Zeitpunkt t_2 die Erkenntnis von B, so soll für das Wahrscheinlichkeitsmaß P_2, welches den neuen Zustand repräsentiert, $P_2(A) = P_1(A|B)$ gelten.
Diese Standardkonditionalisierung wurde von Jeffrey in seinem Werk „The logic of decision" [113] dahingehend verallgemeinert, dass nun nach einer Konditionalisierung keine trivialen Wahrscheinlichkeiten in Erscheinung treten, wenn sie nicht schon vorhanden waren. Diese Vorschrift, auch bekannt als „Jeffrey's Rule" oder „Probability Kinematics", stellt neben der „evidentialistischen Entscheidungstheorie"[41] seinen bedeutendsten philosophischen Beitrag dar.
Zunächst wollen wir sie uns für eine dichotome Partition, U und $\overline{U}$[42], des Ergebnisraumes verständlich machen, da dies anschaulicher ist und sich dann problemlos auf beliebige Partitionen verallgemeinern lässt. Man möchte ein bestehendes Wahrscheinlichkeitsmaß P_1 zu einem neuen Maß P_2 dahingehend abändern, dass U statt $P_1(U)$ nun den Wert $\widetilde{P}(U)$ erhält und dabei weitgehend die alte Struktur von P_1 konserviert bleibt. Jeffrey's Vorschlag dazu ist

$$P_2(V) = \widetilde{P}(U)P_1(V|U) + \widetilde{P}(\overline{U})P_1(V|\overline{U}),$$

was wir in verkürzter Form als $(U, \widetilde{P}(U))$-Jeffrey-Konditionalisierung bezeichnen wollen. Man gewinnt also das neue Wahrscheinlichkeitsmaß P_2 als Konvexkombination von herkömmlichen Konditionierungen und es ist nur dann wohldefiniert, falls $\widetilde{P}(U) > 0$ $P_1(U) > 0$ und $\widetilde{P}(\overline{U}) > 0$ $P_1(\overline{U}) > 0$ impliziert. Die Wahl einer Konvexkombination stellt zwei Dinge sicher: Erstens ergibt sich bei $\widetilde{P}(U) = 1$ die Standardkonditionierung als Spezialfall und zweitens wird dadurch die in P_1 kodierte Information weitgehend erhalten. Bei der Standardkonditionierung besteht

[41] Den Unterschied zwischen kausaler und evidentialistischer Entscheidungstheorie werden wir in Kapitel 5 Abschnitt 2 betrachten.

[42] $\overline{U}$ bezeichnet das Eintreten möglicher Welten, die nicht in U enthalten sind.

der Mechanismus darin, alle möglichen Welten, welche nicht in dem Konditionierungsereignis enthalten sind, zu ignorieren und die Wahrscheinlichkeitsbewertungen für die restlichen möglichen Welten auf ein Wahrscheinlichkeitsmaß hochzuskalieren, welcher oft prägnant als „cut off and magnify" beschrieben wird. Da dies hier jeweils für U und $\overline{U}$ vollzogen wird, bleiben die ursprünglichen Verhältnisse der Teilereignisse von U (beziehungsweise $\overline{U}$) zueinander erhalten[43]: Falls $V, W \subseteq U$, so gilt $P_2(V)/P_2(W) = P_1(V)/P_1(W)$.
Diese Regel lässt sich dann auf beliebige endliche Partitionen $\{U_i\}$ mit neuen Bewertungen $\{\widetilde{P}(U_i)\}$ verallgemeinern, falls jeweils $\widetilde{P}(U_i) > 0$ $P_1(U_i) > 0$ impliziert:

$$P_2(V) = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{P}(U_i) P_1(V|U_i).$$

Man mag nun den Eindruck haben, dass Jeffreys Regel der herkömmlichen Konditionierung von Wahrscheinlichkeitsmaßen in jeder Hinsicht überlegen ist, jedoch ist das nicht der Fall; zwar enthält sie die übliche Konditionierung als Spezialfall, aber diese hat eine besondere Eigenschaft, welche in der von Jeffrey betrachteten Allgemeinheit nicht mehr zutrifft: Sukzessive Konditionierungen auf zwei Teilmengen U_1 und U_2 sind kommutativ und entsprechen im Endeffekt einer Konditionierung auf $U_1 \cap U_2$. Dies ergibt sich wiederum daraus, dass nur interessant ist welche möglichen Welten im Sinne einer nichttrivialen Wahrscheinlichkeitsbewertung übrig bleiben. Deren Bewertungen relativ zueinander bleiben jeweils gewahrt und werden am Ende nur skaliert. Bei der Jeffrey-Konditionalisierung werden dagegen nicht nur Mengen reduziert, sondern ganze Partitionen müssen miteinander vereint werden. Zwar gestaltet sich das allein für die Mengen unproblematisch, da zwei Partitionen $\{U_i\}$ und $\{V_j\}$ unabhängig von deren Reihenfolge immer zu der verfeinerten Partition $\{U_i \cap V_j\}$ führen, jedoch vollzieht sich das für die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten nicht so leicht, da diese verfeinerte Partition leere Mengen beinhalten kann und der leeren Menge immer der Wert null zugewiesen wird; deshalb kann man nicht einfach die korrespondierenden Produktwahrscheinlichkeiten verwenden. Wohin die Wahrscheinlichkeit, die eigentlich dieser Menge zugedacht war, verteilt wird, darüber entscheidet die Reihenfolge der Konditionierungen[44].
Nach dieser Vorbereitung werden wir uns jetzt im nächsten Unterabschnitt vergegenwärtigen, weshalb die bereits besprochenen Deutungen des Wahrscheinlichkeitsbegriffes jeweils zu einer Erfüllung der Kolmogorov-Axiome führen.

[43]Das ist auch heuristisch ausgedrückt der Grund, warum das Jeffrey-konditionalisierte P_2 von allen Wahrscheinlichkeitsmaßen, welche die Wahrscheinlichkeit $\widetilde{P}(U)$ für U zuschreiben, die relative Entropie bezüglich P_1 minimiert.

[44]Es sei ein einfaches Beispiel zur Illustration gegeben. Man betrachte den Ergebnisraum $W = \{a, b, c, d\}$ mit anfänglicher Gleichverteilung sowie die Partitionen $U_1 = \{a\}$, $U_2 = \{b, c, d\}$ und $V_1 = \{a, b\}$, $V_2 = \{c, d\}$ mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten u_1, u_2 und v_1, v_2 für die Jeffrey-Konditionalisierung. Die verfeinerte Partition ist $U_1 \cap V_1 = \{a\}$, $U_1 \cap V_2 = \emptyset$, $U_2 \cap V_1 = \{b\}$, $U_2 \cap V_2 = \{c, d\}$. Anwendung der (U_1, u_1)-Konditionalisierung mit anschließender (V_1, v_1)-Konditionalisierung führt zu den Wahrscheinlichkeiten $P(a) = (u_1 v_1)/(u_1 + u_2/3)$, $P(b) = (u_2 v_1)/(3u_1 + u_2)$, $P(c) = v_2/2$, $P(d) = v_2/2$, wohingegen die umgekehrte Reihenfolge $P(a) = u_1$, $P(b) = (u_2 v_1)/(v_1 + 2v_2)$, $P(c) = (u_2 v_2)/(v_1 + 2v_2)$, $P(d) = (u_2 v_2)/(v_1 + 2v_2)$ ergibt.

2.2.2 Gültigkeit der Kolmogorov-Axiome in der logischen und frequentistischen Interpretation

Aus der klassischen beziehungsweise logischen Wahrscheinlichkeitskonzeption lässt sich die Erfüllung der Axiome unmittelbar ableiten.
Im Sinne von Laplace muss zuerst eine Partitionierung in gleichmögliche Ereignisse vollzogen werden; im Anschluss berechnet sich eine Wahrscheinlichkeit als Verhältnis der Anzahl von günstigen Elementarereignissen zu der Gesamtanzahl. Da hier positive Anzahlen oder null durch eine positive Anzahl geteilt werden, ist auch deren Quotient positiv oder null. Offensichtlich gilt dann auch, dass sich diese Quotienten auf eins aufsummieren müssen, da ja durch die Gesamtheit normiert wird. Und die Additivitätseigenschaft ergibt sich direkt aus der Partitionierung. Bedingte Wahrscheinlichkeiten beziehen sich dann auf die induzierte Subpartition einer Teilmenge, was bedeutet, dass die neue Gesamtanzahl jetzt durch die Kardinalität der Teilmenge gegeben ist. Es muss erwähnt werden, dass gerade die klassische Konzeption in gewisser Weise das Vorbild für den mengentheoretischen Ansatz von Kolmogorov darstellte und damit meinungsbildend wirkte, welche Eigenschaften man von Wahrscheinlichkeiten erwarten könne.
Bei der logischen Interpretation im Sinne Carnaps ist das Vorgehen im Prinzip das gleiche, nur muss man sorgsam unterscheiden, was wirklich als Wahrscheinlichkeit bezeichnet wird. Zuerst werden ja auf allen Zustandsbeschreibungen, welche den möglichen Alternativen entsprechen, die Werte einer Maßfunktion vergeben, die sich definitionsgemäß wie Wahrscheinlichkeiten verhalten, aber in Carnaps Terminologie einfach nur „Werte" heißen, da für ihn ja die Bestätigungsgrade die eigentlichen Wahrscheinlichkeiten sind. Da diese von Bestätigungsfunktionen stammen, welche mit Hilfe der Maßfunktionen im Sinne von konditionierten Wahrscheinlichkeitsverteilungen konstruiert werden, erfüllen die Bestätigungsgrade direkt die Kolmogorov-Axiome. Es sei noch bemerkt, dass in anderen logischen Konzeptionen die Bestätigungsgrade zwischen Sätzen ohne ein Hilfskonstrukt direkt so definiert werden, dass sie die Axiome erfüllen. So geschieht es etwa bei Wittgenstein [250] im Geiste der klassischen Definition, indem der Bezugssatz die Gesamtmasse vorgibt[45].
Der logischen Konzeption als Beziehung zwischen Propositionspaaren stehen dennoch absolute Wahrscheinlichkeiten zur Verfügung, indem einfach eine geeignete Bezugsproposition, zumeist die Tautologie, vereinbart wird. Auf diese Weise kann man die ursprünglichen Werte der Maßfunktion wiederherstellen, welche dann aber als Wahrscheinlichkeiten zu verstehen sind.

Wenn man von einer Deutung von Wahrscheinlichkeiten als relative Häufigkeiten

[45]Im Tractatus sind Sätze Wahrheitsfunktionen von Elementarsätzen, und Konfigurationen von Wahrheitswerten für die Elementarsätzen geben die Wahrheitswerte für die Sätze vor. Die Wahrscheinlichkeit von p gegeben q ist dann der Quotient aus der Anzahl der Konfigurationen, die p und q wahr werden lassen, und deren, die dies für q allein tun. Wie man leicht erkennt, entspricht diese Vorgehensweise in Carnaps System der Maßfunktion, die alle Alternativen gleich bewertet, weshalb Carnap sie aus den oben erwähnten Gründen als inadäquat einstuft.

ausgeht, sieht man ebenso leicht ein, dass sie den Kolmogorov-Axiomen genügen. Offensichtlich sind relative Häufigkeiten nie negativ, da Summen von nichtnegativen Zahlen (als Summanden im Zähler kommen nur null oder eins in Frage) durch eine natürliche Zahl normiert werden. Weiterhin hat die Tautologie die Frequenz eins, da sie niemals Ausbleiben kann und somit bei jeder möglichen Manifestation präsent ist. Und letztendlich ergibt sich die Additivitätseigenschaft für zwei inkompatible Ereignisse daraus, dass in den entsprechenden Frequenzen das Auftreten des jeweils anderen Ereignisses mit null bewertet wird.
Bedingte Wahrscheinlichkeiten lassen sich in dieser Konzeption ebenfalls anschaulich deuten. Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$ ist dann als relative Häufigkeit von A zu verstehen, wenn als Grundgesamtheit das Auftreten von B betrachtet wird: Man zählt wie oft das Ereignis A innerhalb der Abfolge von B Ereignissen auftritt und normiert dies bezüglich aller Vorkommnisse von B.

Zum Abschluss ist noch eine Bemerkung zum Principal Principle bezüglich der vermeintlichen Etablierung der Kolmogorov-Axiome für Propensitäten angebracht. Lewis argumentiert in [139] unter Verwendung dieses Prinzips folgendermaßen: Da Tendenzen als Maßgabe für subjektive Wahrscheinlichkeiten herangezogen werden sollten und diese bekanntlich die Axiome erfüllen, müssen es auch die Propensitäten tun. Hierzu muss wohl nicht viel mehr gesagt werden, als dass dieses Argument etwas verzweifelt anmutet. Das Rationalitätspostulat bezieht seine Stärke daraus, dass es auf eine wohlverstandene alternative Wahrscheinlichkeitsinterpretation Bezug nimmt, weshalb man auch seine subjektiven Wahrscheinlichkeiten unterordnet; jedoch ist das hier bezüglich der Werte der Wahrscheinlichkeiten nicht der Fall.

2.2.3 Dutch-Book-Theorem

Die Interpretation von Wahrscheinlichkeiten als Glaubensgrade hat sich gerade deshalb als tragfähig herausgestellt, da sie, wenn man diese mit Wettquotienten identifiziert und sich weiterhin lediglich dazu verpflichtet, durch seine Zuweisungen kein Dutch Book zu ermöglichen, die Kolmogorov-Axiome erfüllen. Dieser Umstand wird üblicherweise als „Dutch-Book-Theorem" bezeichnet, dessen Gültigkeit wir uns nun anhand des Originalbeweises von DeFinetti klarmachen wollen. Zur Etymologie der Bezeichnung „Dutch Book" sei noch erwähnt, dass man bei Wettangeboten auch von „Büchern" in dem Sinne sprechen kann, als dass sie von Buchmachern zusammengestellt werden. Warum es sich gerade um *Dutch* Books handelt, soll sich angeblich davon ableiten, dass Geschäftsleute aus den Niederlanden im siebzehnten Jahrhundert die Reputation hatten, besonders gerissen zu sein.
Zunächst betrachten wir eine Wette auf ein einzelnes Ereignis, also wir gehen davon aus, dass es nur zwei mögliche Ausgänge gibt: Das Ereignis tritt ein oder nicht. Es seien $K > 0$ die Kosten, also der Geldbetrag, der auf jeden Fall gezahlt werden muss, um an der Wette teilnehmen zu dürfen, und $G > 0$ der Gewinn, also der Betrag, den man bei Zustandekommen des Ereignisses gewinnt, womit sich ergibt, dass sich

abhängig vom Ereignis das Guthaben des Wettteilnehmers um $-K$ beziehungsweise $G-K$ ändert. Man merkt, dass es für das Wettangebot die zwei Freiheitsgrade $G-K$ und $-K$ gibt, welche wir nun angemessener mittels des Wettquotient $\alpha := K/G$ als $G-K = G(1-\alpha)$ und $-K = -G\alpha$ darstellen wollen.
Wenn der Entscheider Wetten nach ihrem Quotienten beurteilt, kann der Buchmacher nur noch mittels des Wertes von G und seiner Entscheidung, ob er eine Wette zum Kauf anbietet oder selber vom Wettteilnehmer ersteht, Einfluss nehmen. Letzteres lässt sich so modellieren, dass G sowohl positiv als auch negativ sein kann, was dann die die Rollen der Partizipanten vertauscht.
Man sieht man sofort ein, dass α nicht negativ sein kann, da G und K immer das gleiche Vorzeichen haben. Zudem ist der Wettquotient wohldefiniert, da man bei $G = 0$ nicht von einer Wette sprechen kann. Weiterhin ist die Eins für sichere Ereignisse reserviert: Bei diesen hat man es mit einer determinierten Zahlung von $G(1-\alpha)$ zu tun; falls diese Summe nicht null ist, könnte der Buchmacher anbieten diese Wette zu kaufen, damit er den Überschuss erhält. Somit ergibt sich unmittelbar, dass Wettquotienten für Ereignisse die ersten beiden Kolmogorov-Axiome erfüllen. Es lässt sich ja dann bei Gültigkeit aller drei Axiome direkt folgern, dass Wahrscheinlichkeiten nie größer als eins sind, was man hier so interpretieren kann, dass man niemals eine Wette annehmen wird, bei welcher der Einsatz höher als der mögliche Gewinn ist. Für das dritte Axiom müssen allerdings größere Anstrengungen unternommen werden.
Die Rationalität schreibt nun vor, Wettquotienten für verschiedene Ereignisse so zu wählen, dass es einem cleveren Buchmacher unmöglich ist, ein Wettangebot zu erstellen, bei dessen Annahme der Wettende nur verlieren kann. Man betrachte nun zwei inkompatible Ereignisse A_1 und A_2 sowie deren Vereinigung $A_1 \cup A_2$ mit zugehörigen Wettraten α_1, α_2 und $\alpha_{1,2}$. Für die disjunkte Zerlegung A_1, A_2, $\overline{A_1 \cup A_2}$ des Ergebnisraumes ergeben sich als entsprechende Auszahlungen $M_1 = G_1(1-\alpha_1) - G_2\alpha_2 + G_{1,2}(1-\alpha_{1,2})$, $M_2 = -G_1\alpha_1 + G_2(1-\alpha_2) + G_{1,2}(1-\alpha_{1,2})$, $M_{1,2} = -G_1\alpha_1 - G_2\alpha_2 - G_{1,2}\alpha_{1,2}$, wenn der Buchmacher die Beträge G_1, G_2, $G_{1,2}$ wählt. Die grundlegende Einsicht besteht nun darin, dass man lineare Algebra zur Beschreibung dieser Situation verwenden kann, indem man den Vektor (M_1, M_2, M_3) als Ergebnis der Multiplikation einer mittels den Wettquotienten gebildeten Matrix und dem Vektor (G_1, G_2, G_3) auffasst. Falls die Determinante der Matrix ungleich null ist, bedeutet dies, dass M_1, M_2, M_3 beliebige Werte annehmen können, was insbesondere auch heißt, dass sie alle negativ sein können und der Wettende somit garantiert verliert. Also ist die notwendige Bedingung zur Verhinderung dieser Situation, dass die Determinante, die sich am einfachsten unter Benutzung der Scherungsinvarianz berechnet, gleich null ist:

$$0 = \det \begin{pmatrix} 1-\alpha_1 & -\alpha_2 & 1-\alpha_{1,2} \\ -\alpha_1 & 1-\alpha_2 & 1-\alpha_{1,2} \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_{1,2} \end{pmatrix} = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_{1,2}.$$

Dies entspricht also einer Additivität der Wettquotienten. Nicht nur ist diese Bedingung notwendig zur Vermeidung eines Dutch Books, sondern sie ist auch schon

hinreichend, da Linearkombinationen von jeweils zwei Spaltenvektoren niemals in allen Komponenten das gleiche Vorzeichen haben, was dem Sachverhalt entspricht, dass es einen Fall gibt, in dem der Wettende gewinnen kann. Auf diese Weise sieht man ein, dass die Vermeidung eines Dutch Books äquivalent zu der Erfüllung des dritten Kolmogorovaxioms ist.
Bezüglich der bedingten Wahrscheinlichkeiten besteht nun Frage, wie man diese geeignet als Wetten interpretieren kann, damit diese konsistent mit der üblichen Quotientendefinition sind. In diesem Fall werden auf ein Ereignis B „bedingte Wetten" für ein Ereignis A eingeführt, die nur dann in Kraft treten, falls das Ereignis B auch stattfindet, und ansonsten einfach annulliert werden[46]. Eine analoge Herleitung mittels einer Determinanten für ein Szenario mit drei Wetten zeigt dann, dass sich unter Vermeidung eines Dutch Books der Wettquotient auf das gleichzeitige Eintreten von A und B, $\alpha_{A\cap B}$, als das Produkt des bedingten Wettquotienten, $\alpha_{A|B}$, mit dem Wettquotienten von B, α_B, ergibt, was einer Umstellung der klassischen Definition entspricht.
Wenn die korrespondierenden Geldbeträge für die Wetten mit $G_{A\cap B}$, $G_{A|B}$ und G_B bezeichnet werden, gestaltet sich abhängig vom Eintritt der Ereignisse $A \cap B$, $\overline{A} \cap B$ und $\overline{B}$ die Auszahlung folgendermaßen[47]: $M_1 = (1 - \alpha_{A\cap B})G_{A\cap B} + (1 - \alpha_{A|B})G_{A|B} + (1 - \alpha_B)G_B$, $M_2 = -\alpha_{A\cap B}G_{A\cap B} - \alpha_{A|B}G_{A|B} + (1 - \alpha_B)G_B$, $M_3 = -\alpha_{A\cap B}G_{A\cap B} - \alpha_B G_B$. Wir können die Auszahlungen wieder geeignet als Ergebnis einer Matrixmultiplikation auffassen, wobei dann die folgende Determinante darüber entscheidet, ob dieser Vektor beliebige Komponenten haben kann:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\alpha_{A\cap B} & 1-\alpha_{A|B} & 1-\alpha_B \\ -\alpha_{A\cap B} & -\alpha_{A|B} & 1-\alpha_B \\ -\alpha_{A\cap B} & 0 & -\alpha_B \end{pmatrix} = \alpha_{A|B}\alpha_B - \alpha_{A\cap B}.$$

Die notwendige Bedingung ist auch hier, dass die Determinante null sein muss, welche aber wiederum hinreichend ist, wovon man sich analog zum obigen Fall mittels Linearkombinationen überzeugt. Falls wir wieder die Wettraten als Wahrscheinlichkeiten deuten, so ergibt sich $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$. Das heißt also, dass bei Hinzunahme von bedingten Wetten ein Dutch Book weiterhin nicht möglich ist, wenn zusätzlich zu der bereits etablierten Kohärenz die Quotientendefinition in dem Sinne eingehalten wird, dass der Wettquotient für eine bedingte Wette eindeutig durch die Wettquotienten für die gewöhnlichen Wetten bestimmt ist.
Soweit die Darstellung des Dutch-Book-Theorems, welches „nur" eine analytische Wahrheit darstellt und formale Eigenschaften spezifiziert. Was jedoch genau die epistemische Relevanz des Theorems ist und welche impliziten Annahmen gemacht wurden, um das Wettszenario in den präsentierten formalen Rahmen zu übertra-

[46] Somit erscheint es auch sofort plausibel unmögliche Ereignisse von dieser Prozedur auszuschließen, da Wetten, die niemals monetäre Konsequenzen haben, uninteressant sind und ihre Bezeichnung gar nicht verdienen.

[47] Um Trivialfälle zu vermeiden, wollen wir annehmen, dass weder eine Inklusion noch eine Disjunktheit zwischen den Mengen A und B vorliegt. In solchen Fällen lässt sich das Resultat noch leichter ableiten.

gen, diskutieren wir in Kapitel 4 Abschnitt 1. Die obige Darstellung bezog sich auf Wetten, die zu einem Zeitpunkt getätigt werden, weshalb man hier von einem „synchronen Dutch Book" spricht. Welche zusätzlichen Fragestellungen sich ergeben, wenn man Wetten betrachtet, die sich in einem sogenannten „diachronen Dutch Book" über mehrere Zeitpunkte verteilen, wird ebenfalls in Kapitel 4 Abschnitt 1 untersucht.

2.3 Konklusion bezüglich der Deutung von Wahrscheinlichkeiten

Wie wir gesehen haben, spielten für das klassische Verständnis der Wahrscheinlichkeit Symmetrien und Gleichmöglichkeit die zentrale Rolle; jedoch limitierte dies erstens den Anwendungsbereich und trug zweitens nicht wirklich dazu bei, den Wahrscheinlichkeitsbegriff zu explizieren. Die logische Auffassung, in welche sie mündete, verzichtet darauf, das Konzept der Gleichmöglichkeit wieder aufzugreifen, und zieht sich allein auf die Bedeutung der Wahrscheinlichkeit als Bestätigungsgrad zurück. Dadurch gelingt es ihr, die Notwendigkeit von Symmetrien zu überkommen und eine Erklärung von Wahrscheinlichkeit durch einen anderen Begriff zu liefern.
Die im Sinne der oft beschriebenen Dualität des Wahrscheinlichkeitsbegriffes alternative Interpretationslinie[48] startet beim Frequentismus, der zunächst mittels unendlichen Kollektiven operiert und Probleme bei der Zuweisung von Wahrscheinlichkeiten für Einzelereignisse hat, aber wiederum explizit darstellt, wie man Wahrscheinlichkeiten verstehen kann. Die entscheidende Modifikation erfährt der Frequentismus in der Propensitätstheorie, welche erzeugende Bedingungen statt Kollektive als maßgeblich betrachtet und besser für Einzelvoraussagen gerüstet zu sein scheint. Der schwerwiegendste Einwand gegen eine objektive Deutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes, die mögliche Abwesenheit von Frequenzen, soll hier mittels einer Fokussierung auf physikalische Tendenzen entkräftet werden. Jedoch verschließen sich diese einer empirischen Überprüfung, so dass man sich eigentlich im Kreis bewegt.
Man mag sich fragen, wie viel Objektivität Wahrscheinlichkeiten tatsächlich innewohnt. Zweifellos haben die Gegenstände der induktiven Logik und des Frequentismus, Bestätigungsgrade und relative Häufigkeiten, einen streng objektiven Gehalt. Jedoch ist die Auswahl einer Maßfunktion beziehungsweise einer entsprechenden Frequenz keinen kanonischen Prinzipien unterworfen. Zum Beispiel befindet sich die Wahl einer passenden formalen Sprache sowie einer geeigneten Maßfunktion außerhalb dem Anliegen der induktiven Logik, was zu Recht Zweifel an ihrem alleinigen Erklärungsanspruch für epistemische Fragen aufkommen lässt. Es muss immer ein weiteres Situationsverständnis einfließen, um Bestätigungsgrade und relative Häufigkeiten gewinnbringend einsetzen zu können, und daher ist die bayesianische Auffassung der Wahrscheinlichkeit unausweichlich, weil dabei der Mensch in seiner Urteilskraft bewusst einbezogen wird. Man darf Bayesianismus nicht mit Beliebigkeit gleichsetzen; stattdessen sollte man anerkennen, dass es einen absolut objektiven Gehalt von Wahrscheinlichkeiten nur mit Hilfe ihrer metaphysischen Deutung als Propensitäten geben kann, da sie eine „physikalische Eigenschaft" darstellen. Wir können uns aber vernünftig nur für eine epistemische Auslegung von Wahrscheinlichkeiten entscheiden. Dass postulierte objektive Wahrscheinlichkeiten für epistemische Belange unter vernünftigen Gesichtspunkten nur eine untergeordnete Rolle spielen können, zeigt sich unter anderem daran, dass die Propensitätstheorie Streitschriften

[48] Der gerade eben skizzierte Teil stellt die epistemische im Gegensatz zur objektiven Komponente dar.

wie Eagle's „Twenty-one arguments against propensity analyses of probability" [56] geradezu heraufbeschwört[49]. Der Bayesianismus erlaubt es zudem, alle Vorzüge der anderen Deutungen zu emulieren (Expertenwahrscheinlichkeiten) und deren Nachteile durch eine vernünftige Anwendung zu annullieren[50]. Dass dies keine triviale Aufgabe ist, versteht sich von selbst, weshalb in den weiteren Kapiteln mit großer Sorgfalt versucht wird, diese Vernunft weiter zu explizieren. Letztendlich ist festzustellen, dass unabhängig davon, welches Verständnis man von Wahrscheinlichkeiten voraussetzt, sie immer noch zusätzlich Glaubensgrade für Menschen als epistemische Subjekte sein können. Umgekehrt wird jedoch ein Glaubensgrad nicht zwingend zu einer Frequenz.

[49] Unter anderem werden dort auch die in Unterabschnitt 1.4 präsentierten Bedenken genannt.

[50] Hajek meint in „The reference class problem is your problem too!"[92] , dass das Referenzklassenproblem, durch einen Eingang über die Expertenprinzipien, den Bayesianismus zusätzlich belaste. Tatsächlich ist der Bayesianismus aber die einzige Möglichkeit, das Referenzklassenproblem in den Griff zu bekommen.

2.4 Was ist das ideale Fundament einer Wahrscheinlichkeitstheorie?

Grundsätzlich betrachtet man heute die Kolmogorov-Axiomatisierung als natürlich und leistungsfähig, jedoch gibt es auch kritische Stimmen, die eine Überarbeitung derselben als Grundlage für die Wahrscheinlichkeitstheorie aufgrund bisher nicht wahrgenommener Probleme fordern. Hajek ist beispielsweise der Auffassung, dass die absolute Wahrscheinlichkeit von Ereignissen nicht den geeigneten Grundbaustein einer Axiomatisierung darstellen kann. Sie werde besser mit dem Konzept der bedingten Wahrscheinlichkeit vollzogen, wobei diese Herangehensweise schon mehrfach verfolgt wurde, wie etwa von Popper [172], Renyi [182], Spohn [215] und Roeper/Leblanc [134]. Sind aber die von ihm in „What conditional probability could not be" [90] genannten Gründe so schlagkräftig, dass sie eine Überarbeitung dieser verdienten Axiomatisierung tatsächlich ernsthaft in den Raum stellen?

In der Kolmogorov-Axiomatisierung wird die konditionierte Wahrscheinlichkeit als Quotient von absoluten Wahrscheinlichkeiten definiert: $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$, wobei A das Ereignis von Interesse darstellt und das Ereignis B in gewisser Weise den Informationszuwachs modelliert. Sein erster Kritikpunkt betrifft den Umstand, dass diese Definition nur gültig sein kann, wenn $P(B)$ von null verschieden ist.
Dazu ist aber das Folgende zu bemerken: Wenn ein Ereignis mit Wahrscheinlichkeit null eine logische Unmöglichkeit darstellt, ist es leicht einzusehen, dass sich eine Konditionierung darauf verbietet. Insofern auf ein Erfahrungsdatum konditioniert wird, kann so etwas gar nicht eintreten; Konditionierungen auf solche Ereignisse erfüllen demnach keinen Zweck.
Natürlich stellt sich damit sofort die Frage, ob es dennoch Ereignisse gibt, denen man aus einem bestimmten Grund die Wahrscheinlichkeit null zuweist, obwohl sie eine logische Möglichkeit bezeichnen[51]. Wenn Hajek meint, dass es Unmengen von Beispielen über derartige Ereignisse gebe, muss man aber bemerken, dass diese alle eine Gemeinsamkeit besitzen: Es wird immer ein Intervall reeller Zahlen mit einer kontinuierlichen Verteilung betrachtet; insofern sind diese Beispiele der mathematischen Abstraktion entliehen. Da sich in einem reellen Intervall überabzählbar viele Zahlen befinden, kann der Ansatz, jede Zahl mit einer positiven Wahrscheinlichkeit zu versehen, nicht funktionieren. Insbesondere hat bei einer kontinuierlichen Verteilung jede einzelne Zahl die Wahrscheinlichkeit null. Viele der Haupteinwände von Hajek werden mit Hilfe seines „Four Horn Theorems" lanciert, welches aber auf die beschriebene Art allerlei mathematische Eigenheiten der reellen Zahlen ausnutzt. Das Problem von logisch möglichen Ereignissen mit Wahrscheinlichkeit null

[51] Wie bereits erwähnt wurde, spricht man im Falle, dass Wahrscheinlichkeit null die logische Unmöglichkeit eines Ereignisses impliziert, von regulären Wahrscheinlichkeitsmaßen. Wir besprechen nun, inwieweit andere Maße überhaupt wichtig für einen vernünftigen Umgang mit Wahrscheinlichkeiten sein können.

ist damit einerseits allein auf die Welt der Mathematik begrenzt[52]. Es ist vielmehr festzustellen, dass solche Ereignisse für praktische Erwägungen im menschlichen Leben irrelevant sind. Daher ist es auch wenig verwunderlich, dass, wie Hajek korrekt bemerkt, dieses Problem in philosophischen Kreisen wenig Beachtung fand, denn um gehaltvolle Voraussagen für Ereignisse in der realen Welt zu machen, sind Probleme, welche aus der Struktur der reellen Zahlen resultieren, absolut zweitrangig.
Aber wo können außerhalb der abstrakten mathematischen Welt noch nichtreguläre Wahrscheinlichkeitsmaße entstehen? Die erste Antwort lautet: im radikalen Subjektivismus. Dies kann aber zweifellos Komplikationen nach sich ziehen, die selbst dem orthodoxen Bayesianismus zuwiderlaufen: Etwa wenn man ein als unmöglich eingestuftes Ereignis tatsächlich beobachtet und im Sinne von Lernen aus Erfahrung darauf konditionieren möchte. Da dies aber das Teilen durch null nach sich zieht, kann nicht das subjektivistische Hauptinstrument, die Formel von Bayes, angewendet werden. Selbst Anhänger des radikalen Personalismus sehen die Fragwürdigkeit derartiger Beurteilungen ein, obwohl sie dennoch kohärent sein können. Der zweite Bereich, in dem so etwas auftreten kann, ist der unreflektierte Frequentismus: wenn die Anzahl der Wiederholungen so klein ist, dass sich noch nicht jedes mögliche Verhalten manifestiert hat. Dies widerspricht jedoch einer vernünftigen Interpretation des Wahrscheinlichkeitsbegriffes, da hierbei die Seltenheit eines Ereignisses mit dessen Unmöglichkeit gleichgesetzt wird und somit ein zu grober Umgang mit epistemologischen Werkzeugen stattfindet.
Damit sehen wir ein, dass die Gründe, welche die Belegung von logischen Möglichkeiten mit Wahrscheinlichkeit null nahelegen, für einen vernünftigen und pragmatischen Umgang mit Wahrscheinlichkeiten unerheblich sind, und deshalb der erste Einwand nicht überzeugen kann.

Als zweiter Haupteinwand, der gegen den bestehenden Ansatz, konditionierte Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe absoluter auszudrücken, spricht, wird von Hajek das Problem angeführt, dass Erstere oft nicht definiert seien, weil die Quotientenformel sie mit undefinierten absoluten Wahrscheinlichkeiten in Beziehung setze. Konditionierten Wahrscheinlichkeiten selbst lasse sich eine sinnvolle Bedeutung zuschreiben, aber wenn man die Quotientenformal befolge, führe dies nur in die Irre. Um dies zu verdeutlichen wird Hajeks Standardbeispiel bemüht: Ein gewisser Joe zieht zufällig eine Kugel aus einer Urne, die neunzig rote und zehn weiße Kugeln beinhaltet, und es wird gefragt, mit welcher Wahrscheinlichkeit von ihm eine rote Kugel gezogen werde. Dies mag als völlig harmloser Vorgang erscheinen, der sich leicht durch die Standardwahrscheinlichkeitsrechnung in den Griff bekommen lässt, jedoch dürfe man nicht übersehen, dass man diese Wahrscheinlichkeit aufgrund der Quotientenformel als

[52]Bezüglich der rein mathematischen Erfassung im kontinuierlichen Fall ist noch zu bemerken, dass Kolmogorov sich des Problems durchaus bewusst war und eine Verfeinerung der Quotientenanalyse der konditionierten Wahrscheinlichkeit mit Hilfe einer geeigneten Zufallsvariablen, deren Existenz durch das Radon-Nikodym Theorem garantiert wird, ausarbeitete, um eine Division durch null geeignet zu verstehen. Diese zieht aber wiederum Kritik von Hajek auf sich, allerdings liegt es außerhalb unseres formulierten Ziels, hierauf einzugehen.

Quotient von P(„Joe zieht eine rote Kugel" $\cap$ „Joe zieht zufällig eine Kugel aus der Urne") und P(„Joe zieht zufällig eine Kugel aus der Urne") schreiben kann. Keine dieser beiden Wahrscheinlichkeiten sei definiert, da über das Ereignis „Joe zieht zufällig eine Kugel aus der Urne" keine Aussage gemacht wird. Zeigt dies aber wie absurd unsere bisherige Wahrscheinlichkeitskonzeption ist?
Tatsächlich weist Hajek damit auf den wichtigen Sachverhalt hin, nämlich dass gerade konditionierte Wahrscheinlichkeiten bei vielen unterschiedlichen Fragestellungen unumgänglich sind, da sie viel spezifischer als ihre absoluten Analoga das Ereignis von Interesse erfassen. Er gibt dafür neben dem erwähnten kugelziehenden Joe weitere Beispiele aus den verschiedensten Bereichen wie gemäßigtem Bayesianismus, Quantenmechanik, Entscheidungstheorie und probabilistische Kausalitätstheorie an. Im Bayesianismus treffen wir derartige Konstrukte in der Gestalt von Expertenwahrscheinlichkeiten wie etwa dem Principal Principle von Lewis an. In der Quantenmechanik wird man aufgrund der Regel von Born mit Wahrscheinlichkeiten der Form $P(O|M)$ konfrontiert, wobei O eine erwartete Beobachtung und M die Art der Messung bezeichnet. Ähnlich stellt es sich in der evidentialistischen Entscheidungstheorie von Jeffrey [113] dar, wo erwartete Nutzenswerte mit Hilfe von auf Handlungen des Entscheiders konditionierten Wahrscheinlichkeiten berechnet werden. Und auch in der probabilistischen Kausalitätstheorie sind solche Konditionierungen üblich, da die grundlegende Überzeugung darin besteht, dass ein Ereignis A ein anderes Ereignis B verursache, falls für die konditionierten Wahrscheinlichkeiten $P(B|A) > P(B|\overline{A})$ gilt. An sich hat man kaum Schwierigkeiten diesen konditionierten Wahrscheinlichkeiten einen numerischen Wert zuzuweisen, die Probleme beginnen aber, wenn man versucht diese Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der alternativen Darstellungsweise als Quotient von absoluten Wahrscheinlichkeiten $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$ zu analysieren, weil man dann die Wahrscheinlichkeiten $P(B)$ und $P(A \cap B)$ in den Griff bekommen müsste, was aber mit einigen Subtilitäten verbunden ist. Wie wir gesehen haben, ist die Gemeinsamkeit der gegebenen Beispiele, dass mit dem Ereignis B jeweils Wahrscheinlichkeiten verknüpft waren, die eigentlich nicht unmittelbar interessierten und damit auch nicht durch den primären Wahrscheinlichkeitsraum ausgedrückt werden konnten.
Vergegenwärtigen wir uns, wie das Konzept der Wahrscheinlichkeit sinnvoll anzuwenden ist und inwiefern Wahrscheinlichkeit als formalisiertes Konzept wirklich zwei Angaben benötigt. Es geht immer darum, ein einer zugrunde liegenden Partitionierung in mögliche Welten entstammendes Ereignis zu bewerten, dessen Manifestation fraglich ist. Womit dieses sinnvollerweise zu bewerten ist, hängt von der Situation ab: Manchmal ist das Indifferenzprinzip angebracht, oft aber die relative Häufigkeit. Und insofern kann man Wahrscheinlichkeit als zweistellige Relation auffassen, welches dem Paar von Bewertungsgrundlage und Ereignis eine Zahl zuordnet. Hajek hat Recht, wenn er behauptet, dass es nie vollständig absolute Wahrscheinlichkeiten im Sinne von numerischen Bewertungen für Ereignisse ohne Voraussetzungen gibt. Es hat schlichtweg keinen Sinn zu fragen, welche Wahrscheinlichkeit ein bestimmtes Wurfresultat habe, wenn man gar nicht weiß, welches physikalische Objekt denn geworfen wird. Wieso kommt es dann aber, dass man überhaupt von absoluten Wahr-

scheinlichkeiten sprechen möchte und kann? Die basale Feststellung lautet, dass die Bewertungsgrundlage je nach Situation vom epistemischen Subjekt festgelegt wird und somit nicht erneut in der formalen Theorie erwähnt werden muss; damit reduziert sich Wahrscheinlichkeit auf eine Abbildung, die Ereignissen Zahlen zuweist. Der eigentliche Zweck von Konditionierungen besteht darin, dass die Bewertungsgrundlage durch fiktive Tatsachen mutwillig erweitert wird, um ein verbessertes Situationsverständnis zu ermöglichen; gerade weil das in willkürlicher Weise passiert, muss es extra vermerkt werden. Insbesondere heißt das, dass sich die Wahrscheinlichkeit bei dem Erkennen der Tatsache auf diese Weise ändern soll beziehungsweise dass die Information auf die beschriebene Art Eingang in die Bewertung findet, falls sie schon vorliegt[53]. Dies hilft uns auch das Beispiel des kugelziehenden Joe besser zu verstehen: Entweder man betrachtet den Vorgang nur, wenn er ordnungsgemäß durchgeführt wird, also mit Konditionierung, was dann die üblichen Wahrscheinlichkeiten liefert, oder man betrachtet das absolute Ereignis, was dann aber bedeutet, dass die gesamte Wahrscheinlichkeitsmasse nicht in herkömmlicher Weise aufgeteilt wird, da es immer noch das Restereignis gibt, dass die Ziehung gar nicht stattfindet. Der Grund, warum man hierbei häufig keinen Unterschied macht, liegt darin, dass es aus Erfahrung kaum Probleme gibt, ein derartiges Zufallsexperiment zu realisieren, wenn man möchte; deshalb kann man davon ausgehen, dass die Wahrscheinlichkeit einer erfolgreichen Durchführung ungefähr eins ist, womit die Konditionierung trivial wird. Damit hat Hajek in erster Linie auf eine Subtilität hingewiesen, die aber für die meisten praktischen Anwendungen keine Rolle spielt. Natürlich ist die Praxis, über die Begleiterscheinungen keine Überlegungen anzustellen, in gewisser Hinsicht gedankenlos, denn man sollte immer genau spezifizieren, was eigentlich gemeint ist; aber wie gesagt handelt es sich nur um eine marginale Gedankenlosigkeit, die an sich nicht gegen das Konzept der absoluten Wahrscheinlichkeit spricht.

Wie bereits erwähnt wurde, meint Hajek, dass die Wahrscheinlichkeiten, welche erst durch eine Ausschreibung des Quotienten in Erscheinung treten, oft gar nicht definiert seien; um den Ernst der Problematik zu verdeutlichen, bringt er die oben genannten Beispiele. Eine Definition von konditionierten Wahrscheinlichkeiten, welche diese Wahrscheinlichkeiten vermeidet, sei demnach viel vorteilhafter. Ein schwerwiegendes Problem läge in der Tat vor, wenn Wahrscheinlichkeiten für manche Ereignisse prinzipiell nicht definierbar wären[54]. Doch ist dem so? Dies leite sich laut Hajek daraus ab, dass es ein heikles Thema sei, Akte des freien Willens mit einer

[53] Nur in Ausnahmefällen trifft dies nicht zu. Die mögliche Schwierigkeit bei Letzterem wird als „old evidence problem" bezeichnet: Sollten Wahrscheinlichkeiten, welche aufgrund eines bestimmten Kenntnisstandes K geformt wurden, genau den Wahrscheinlichkeiten entsprechen, welche man durch Konditionalisierung mit der Information I aus den Wahrscheinlichkeiten erhält, die aufgrund von K vermindert um I geformt wurden? Die Antwort ist aus Konsistenzgründen grundsätzlich „ja"; etwaige Probleme entstehen dadurch, dass man im allgemeinen Fall den Vorzustand $K \setminus I$ nicht eindeutig charakterisieren kann ([59], [104], [194], [57], [1]).

[54] Dazu ist zu bemerken, dass es sich nicht um den von DeFinetti geprägten Ausspruch „Probability does not exist!" dreht, welcher auf der Pluralität von Meinungen basiert. Stattdessen geht es hier um andere Schwierigkeiten.

Wahrscheinlichkeit zu assoziieren[55]. Allerdings ist festzustellen, dass es, insofern es sich um Willensakte anderer Menschen handelt, keine Hindernisse gibt, da es sich grundsätzlich um verborgene Sachverhalte handelt[56]. Diese Vorgehensweise wird von Philosophen wie Spohn [213], Kyburg [131], Gilboa [82] und Levi [137] gutgeheißen, solange man wirklich nur die Handlungen anderer Personen und nicht seine eigenen betrachtet. Daher schlägt Hajek vor, den ominösen Joe durch sich selbst ersetzen, um einzusehen, dass es spätestens dann unmöglich sei, die absoluten Wahrscheinlichkeiten für das Urnenbeispiel zu finden. Das eigentliche Problem sei die in vielen Fällen vorliegende vollständige Kontrollierbarkeit des eigenen Willen, welche mit der Sinnhaftigkeit von probabilistischen Erwägungen kollidiere. Dies ist aber nur ein Scheinproblem: Je mehr wir wissen, desto besser. Zudem ist festzustellen, dass *Akte* des freien Willens weit von trivialen Wahrscheinlichkeiten entfernt sein können. Natürlich gibt es viele Fälle, in denen sich eine intendierte Handlung ohne Widerstände verwirklichen lässt, aber das weiß man ja nicht vorher. Hat man also einmal akzeptiert, dass eigene Handlungen sehr wohl der Gegenstand von wahrscheinlichkeitstheoretischen Überlegungen sein können, gelingen diese dann konsequenterweise auch für die Konjunktion mit anderen Ereignissen. Was ein wirkliches Problem darstellen könnte, ist die von einigen Subjektivisten akzeptierte Einsicht[57], dass eigenen Handlungen prinzipiell keine Glaubensgrade zugeschrieben werden können. Diese Ansicht, welche im Rahmen bayesianischer Entscheidungstheorie relevant ist, wird detaillierter in dem zugehörigen Kapitel 5 in Unterabschnitt 1.2 diskutiert, jedoch wollen wir dennoch kurz erwähnen, warum diese Auffassung in Frage zu stellen ist. Die dort skizzierte Unmöglichkeit gründet in der operationalen Erfassung von Glaubensgraden, aber wie wir noch in Kapitel 4 Abschnitt 1 sehen werden, ist diese mit mehreren Problemen beladen, welche vernünftigerweise eine Unterscheidung von Wettraten und Glaubensgraden statt ihrer Identifikation nahelegen.

Die oben präsentierten Beispiele aus Entscheidungs- und Kausalitätstheorie beziehungsweise Quantenmechanik waren insofern problematisch, als dass sie auf eine eigene Handlung konditionierten. Demnach sind die Expertenzuweisungen erst recht unbedenklich, was insbesondere auch für das autoepistemische Reflektionsprinzip gilt, da es sich um eine zukünftige Meinung handelt, die nicht willkürlich stipuliert wird, sondern aufgrund einer Änderung der epistemischen Verfassung zustande kommt.

Damit können sich die von Hajek aufgeworfenen Bedenken nicht gegen die prinzipielle Definierbarkeit richten, sondern gegen den Umstand, dass den Ereignissen, die durch eine Ausschreibung der Quotientenformel ins Spiel kommen, nicht vernünftig eine Wahrscheinlichkeit zugewiesen werden kann, da nicht genügend Informationen über sie vorliegen. Letztendlich muss man womöglich das Indifferenzprinzip anwen-

[55]Wahrscheinlichkeiten für eigene Handlungen sind tatsächlich mit mehreren Fragen verbunden (einige davon werden unter anderem in [179] aufgeworfen), welche wir ausführlicher in Kapitel 5 Unterabschnitt 1.2 beantworten. Hier werden wir jedoch die für unsere Diskussion relevanten Aspekte kurz ansprechen.

[56]Nach Kant [120] könne man diese unter dem Gesichtspunkt der Kausalität beurteilen.

[57]Diese Ansicht wird etwa von Spohn und Levi vertreten.

den, wobei aber bekannt ist, dass dieses in vielen Fällen nur sehr grobe Ratschläge erteilt. Diesen Ausweg hält er jedoch für absurd und verweist auf eine Idee von Fine [68], der empfiehlt, bei mangelnder Datenlage einfach darauf zu verzichten, eine Wahrscheinlichkeit zu zuweisen, was die Wahrscheinlichkeiten absichtlich undefiniert lässt. Eine solche Beurteilung eines Ereignisses könne man nicht freiwillig machen wollen; man müsse schon dazu gezwungen werden. Was er also wirklich sagen will, ist, dass aufgrund der Quotientenformel Wahrscheinlichkeiten Eingang in das Problem finden, die möglicherweise inadäquat sind und daher vermieden werden sollten, da sie die Rechnung verfälschen würden.
Zugegebenermaßen kann es nicht ganz einfach sein, die Wahrscheinlichkeit für ein beliebiges Ereignis sorgfältig zu evaluieren; die entscheidende Frage ist jedoch, inwiefern damit die gesamte Rechnung verfälscht wird. Die Antwort hierauf ist: gar nicht. Dies hängt damit zusammen, dass das „unanalysierbare" Ereignis im Zähler *und* im Nenner des Quotienten auftritt; insofern gleicht sich ein zweimal „gemachter Fehler" wieder aus. Wenn wir tatsächlich ein gutes Situationsverständnis des uns eigentlich interessierenden Ereignisses haben, dann ist der Quotient der absoluten Wahrscheinlichkeiten, welche das „dubiose" Ereignis beinhalten, schon festgelegt. Dies bedeutet, dass uns letztendlich ein Freiheitsgrad zur Verfügung steht. Man kann also eine etwas seltsame Ansicht über das Eintreten von „Joe wirft eine Münze" haben, jedoch wenn man diese bei beiden Wahrscheinlichkeitszuweisungen konsequent einhält, dann mitteln sich diese aus. Das ist genau die Idee, die hinter den sogenannten „gappy assignments" steckt: Wahrscheinlichkeiten werden für alle Ereignisse zugewiesen, um die interne Konsistenz zu wahren, wobei besondere Sorgfalt deren Verhältnissen statt ihren absoluten Werten zukommt. Insofern stellt sich die Frage, ob Wahrscheinlichkeiten höherer Ordnung außerhalb der Formulierung von Expertenprinzipien allein eine sinnvolle Rolle spielen. Wir werden hierauf in Kapitel 5 antworten, wo derartige Wahrscheinlichkeiten in entscheidungstheoretischen Modellen auftauchen.
Die Situation bietet sich also wie folgt dar: Ein Ereignis soll mit Hilfe einer fiktiven Information beurteilt werden. Dass diese Information wiederum ein Ereignis darstellt, welches man probabilistisch betrachten kann, steht außer Frage. Der eigentliche Streitpunkt ist, inwiefern man durch die Quotientenformel gezwungen wird dies zu tun. Konditionierte Wahrscheinlichkeitsmaße sind wiederum Wahrscheinlichkeitsmaße und geben somit eine angestrebte Situationsbewertung. Es ist völlig legitim, sich nur für die konditionierten Wahrscheinlichkeiten zu interessieren, ohne einen Gedanken an die Wahrscheinlichkeit des zur Konditionierung verwendeten Ereignisses zu verschwenden, um ein besseres Situationsverständnis vermittelt zu bekommen[58]. Und das geschieht im prototypischen Fall nicht, weil es so gut wie unmöglich ist, darüber genauere Kenntnisse zu erlangen, sondern weil man diese schlichtweg für uninteressant hält. Dies wird durch den kugelziehenden Joe besonders deutlich, da sich ein derartiges Zufallsexperiment mit Minimalaufwand und ohne Sorge um

[58]Die Sinnhaftigkeit eines solchen Umgangs wird unter anderem dadurch untermauert, dass Spohn etwa in „Strategic Rationality" [218] für entscheidungstheoretische Zwecke nicht auf Handlungen bedingt, sondern die verschiedenen Wahrscheinlichkeitsmaße lediglich durch Handlungen indiziert.

substantielle Hindernisse verwirklichen lässt. Und insofern mutet der von Hajek vorgetragene Einwand leicht sophistisch an. Vielmehr ist festzustellen, dass die übliche Definition die Möglichkeit bietet, die konditionierten Wahrscheinlichkeiten mit den korrespondieren absoluten direkt in Verbindung zu setzen. Wenn dies bei alternativen Axiomatisierungen der bedingten Wahrscheinlichkeit nicht möglich ist, so muss man dies eher als ein Defizit statt eines Vorteils auslegen.

Die gerade ausgeführte Untersuchung von Hajeks Gegenargumenten zeigte nun, dass die Division durch null bei der Quotientenformel der konditionierten Wahrscheinlichkeit in einem vernünftigen beziehungsweise pragmatischen Kontext gar nicht erforderlich ist und man diese Alternativdarstellung von konditionierten Wahrscheinlichkeiten keinesfalls als Pflicht begreifen muss fahrlässige Zuweisungen vorzunehmen. Hier wird mitnichten behauptet, dass man nicht eine sinnvolle Alternative der Wahrscheinlichkeitstheorie basierend auf konditionierten Wahrscheinlichkeiten als Grundbaustein ausarbeiten könnte, jedoch muss bemerkt werden, dass obige Einwände die Vorzüge einer solchen Alternativtheorie nicht direkt offensichtlich werden lassen. Der Umstand, dass sich bei einer Theorie mit konditionierten Wahrscheinlichkeiten als Grundelementen die Betrachtung der Wahrscheinlichkeit des zweiten Ereignisses scheinbar erübrigt, schafft keinesfalls das Problem aus der Welt, dass, insofern es sich um einen noch nicht geschehenen Sachverhalt mit direkter Relevanz handelt, eine sorgfältige Beurteilung desselben für eine gewissenhafte probabilistische Erfassung des eigentlichen Ereignisses unumgänglich ist.

Kapitel 3

Von formalen Eigenschaften zu möglichen Interpretationen

3.1 Bacon'sche Wahrscheinlichkeit

Laut Cohen geht ein alternatives Verständnis des Wahrscheinlichkeitsbegriffes bereits auf Bacon in [7] zurück, weshalb er in [38] die Bezeichnung „Bacon'sche Wahrscheinlichkeit" für Theorien prägte, welche diese Tradition fortführen. Während anfängliche Versuche, nichtadditive Wahrscheinlichkeiten[1] zu etablieren, nur als diffus bezeichnet werden können, gab es gegen Ende des 20. Jahrhunderts eine geradezu überwältigende Vielfalt an sorgsam ausgearbeiteten Theorien. Der primäre Grund dafür lag darin, dass man sich durch die Bedürfnisse einer möglichen maschinellen Implementierung von Künstlicher Intelligenz genötigt sah, Darstellungen von Daten zu ergründen, die sich rechnerisch effizienter handhaben lassen als Wahrscheinlichkeiten. Gerade die Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten von Vereinigungen sich überlappender Mengen erfordert mehrere Rechenschritte, da Additivität nur bei disjunkten Mengen gilt; viel einfacher ist es zum Beispiel in der Rangtheorie, wo lediglich die Bildung eines Minimums genügt. Wir möchten nun die Frage beantworten, ob das wirklich deren einzige Rechtfertigung ist oder diese Alternativansätze einen epistemologischen Aspekt berücksichtigen, der bei herkömmlichen Wahrscheinlichkeiten gänzlich absent war. Das heißt, dass neben den Strukturen an sich deren Anwendungsgebiete und philosophischen Interpretationen zu diskutieren sind; insofern findet ein Vergleich sowohl auf der formalen[2] als auch der begrifflichen Ebene statt. Um dem Umstand Rechnung zu tragen, dass die Kolmogorov-Axiome gewissermaßen als Vorbild für die neueren Theorien dienten (es lassen sich viele Analogien aufdecken), wollen wir immer zuerst die formalen Eigenschaften besprechen und dann zu Fragen der Interpretation übergehen. Hierbei beschränken wir uns auf die

[1] Also Wahrscheinlichkeiten, die dem dritten Kolmogorov-Axiom nicht genügen.

[2] Wir wollen uns nicht zu stark in die technischen Details stürzen, welche womöglich dazu führten, dass wir unser eigentliches Ziel aus den Augen verlieren. Dementsprechend werden viele Ergebnisse ohne Beweis nur erwähnt.

bekanntesten Theorien. Diese stehen nicht völlig isoliert dar, sondern weisen gewisse Abhängigkeiten auf. Es ist der Verdienst von Halpern [95], dies gewissenhaft aufgearbeitet zu haben, weshalb wir uns für eine strukturierte Darstellung der formalen Beziehungen an seine Präsentationsreihenfolge halten wollen. Dabei werden die Alternativansätze einheitlich im Rahmen möglicher Welten dargestellt, wobei wir uns aus den bereits erwähnten Gründen nur auf endliche Ergebnismengen beschränken werden[3].

[3] Viele der Resultate gelten aber unverändert im unendlichen Fall.

3.1.1 Untere und obere Wahrscheinlichkeiten

Die nächstliegende Verallgemeinerung von Wahrscheinlichkeiten stellen sie sogenannten „unteren und oberen Wahrscheinlichkeiten" dar, deren Idee auf Ostrogradsky [167] und Boole [19] zurückgeht. Sie leiten sich von Mengen ab, die aus Wahrscheinlichkeitsmaßen bestehenden: Für eine Menge $\mathcal{P}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen, die auf dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum definiert sind, bezeichnen

$$\mathcal{P}_*(U) := inf\{\mu(U) : \mu \in \mathcal{P}\}, \mathcal{P}^*(U) := sup\{\mu(U) : \mu \in \mathcal{P}\}$$

die untere beziehungsweise obere Wahrscheinlichkeit der Menge U. Offensichtlich erfüllen untere und obere Wahrscheinlichkeiten von einelementigen Mengen die Axiome von Kolmogorov, aber sobald eine nichttriviale Menge vorliegt, muss dies nicht mehr gelten[4]. Insofern erhält man Bewertungen der möglichen Welten, die direkt von Wahrscheinlichkeiten stammen, aber eigentlich keine sind. Wie soll man diese aber dann verstehen?

Hierzu ist es hilfreich, einen Spezialfall zu betrachten, nämlich die sogenannten „inneren und äußeren Maße". Diese ergeben sich, wenn man ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ, das nur auf einer Teilalgebra definiert ist[5], durch die beste untere beziehungsweise obere Approximation für nichtmessbare Mengen auf eine größere Algebra erweitern will[6]. Um das allgemein in Formeln auszudrücken, sei $\mathcal{F}$ die Gesamtalgebra und $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ die Subalgebra, auf welcher das Wahrscheinlichkeitsmaß μ definiert ist; dann sind das innere und das äußere Maß durch folgende Gleichungen für beliebige Elemente U von $\mathcal{F}$ bestimmt:

$$\mu_*(U) := sup\{\mu(V) : V \subseteq U, V \in \mathcal{G}\}, \mu^*(U) := inf\{\mu(V) : U \subseteq V, V \in \mathcal{G}\}.$$

Dass es sich hierbei tatsächlich um einen Spezialfall handelt, wurde von Horn und Tarski [103] gezeigt. Wenn wir unter der „Erweiterung" eines Wahrscheinlichkeitsmaßes auf $\mathcal{G}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{F}$ verstehen, welches für alle Elemente von $\mathcal{G}$ die gleichen Wahrscheinlichkeiten zuweist, dann gilt der folgende Zusammenhang:

Wenn μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{G}$ ist und $\mathcal{P}_\mu$ die Menge aller Erweiterungen von μ auf $\mathcal{F}$ darstellt, dann gilt für alle Elemente U von $\mathcal{F}$:
$\mu_*(U) = (\mathcal{P}_\mu)_*(U), \mu^*(U) = (\mathcal{P}_\mu)^*(U)$.

Dabei muss noch bemerkt werden, dass die Menge aller Erweiterungen an sich mehr

[4] Man stelle sich etwa $W = \{a, b, c\}$ mit den Wahrscheinlichkeitsmaßen μ_1, μ_2 und μ_3 vor, welche die folgenden Zuweisungen vergeben: $\mu_1(\{a\}) = 0,2$, $\mu_1(\{b\}) = 0$, $\mu_1(\{c\}) = 0,8$, $\mu_2(\{a\}) = 0,5$, $\mu_2(\{b\}) = 0$, $\mu_2(\{c\}) = 0,5$, $\mu_3(\{a\}) = 0$, $\mu_3(\{b\}) = 0,1$, $\mu_3(\{c\}) = 0,9$. Dann gilt $\mathcal{P}_*(\{a\}) = 0$, $\mathcal{P}_*(\{b\}) = 0$, $\mathcal{P}_*(\{c\}) = 0,5$, $\mathcal{P}^*(\{a\}) = 0,5$, $\mathcal{P}^*(\{b\}) = 0,1$, $\mathcal{P}^*(\{c\}) = 0,9$.

[5] Was ja bedeutet, dass nicht alle Elemente der Potenzmenge „messbar" sind, also eine Wahrscheinlichkeit zugewiesen bekommen.

[6] Hierbei muss es sich nicht erneut um ein Wahrscheinlichkeitsmaß handeln.

Information kodiert, als nach dem Übergang zu den oberen und unteren Approximationen erkenntlich ist: Beispielsweise können verschiedene Mengen von Wahrscheinlichkeitsmaßen die gleichen oberen und unteren Wahrscheinlichkeiten besitzen.
Diese Strukturen kann man nun folgendermaßen deuten. Betrachten wir zum Beispiel eine Tasche mit 100 Murmeln von der bekannt ist, dass sich darin 30 rote Murmeln befinden und der Rest entweder aus blauen oder gelben besteht[7]. Wenn man sich fragt, wie man sein Unwissen bezüglich eines zufälligen Zuges einer Murmel aus der Tasche mit Hilfe von Wahrscheinlichkeiten darstellen soll, bemerkt man, dass man relativ problemlos einer roten Murmel die Wahrscheinlichkeit $0,3$ zuweisen kann, aber sich bei den Wahrscheinlichkeiten für blau oder gelb doch etwas zurückhalten möchte, da eine weitere Quelle von Unsicherheit auftritt. Den beschriebenen Wissenszustand kann man so interpretieren, dass man im Hinblick auf die kanonische Algebra nur den Mengen $\emptyset, \{rot\}, \{gelb, blau\}, \{rot, gelb, blau\}$, welche das Resultat des Zufallszuges beschreiben, guten Gewissens eine Wahrscheinlichkeit zuschreiben möchte, nicht aber den Mengen $\{gelb\}, \{blau\}, \{rot, gelb\}, \{rot, blau\}$. Und genau hier kommen nun die oberen und unteren Wahrscheinlichkeiten ins Spiel. Man kann den beschriebenen Zustand dadurch charakterisieren, dass wir nur ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf einer Subalgebra haben[8] und die Menge aller Erweiterungen betrachten wollen, die möglichen Inhalten der Tasche entsprechen. Wenn man sich diese überlegt, so induziert jede dieser Möglichkeiten ein unterschiedliches Wahrscheinlichkeitsmaß ν_x: Etwa liefert das von 30 roten, x blauen und $70 - x$ gelben Murmeln die Werte $\nu_x(\{rot\}) = 0,3$, $\nu_x(\{blau\}) = x/100$ und $\nu_x(\{gelb\}) = (70 - x)/100$, was dann ν_x als Wahrscheinlichkeitsmaß eindeutig bestimmt. Also ausgehend von der Menge aller Erweiterungen $\mathcal{P}_\mu = \{\nu_x, x \in \{0, \ldots, 70\}\}$ von μ, welche unsere Vermutungen widerspiegelt, ergibt sich $(\mathcal{P}_\mu)_*(\{blau\}) = \nu_0(\{blau\}) = 0 = \mu_*(\{blau\})$ und $(\mathcal{P}_\mu)^*(\{blau\}) = \nu_{70}(\{blau\}) = 0,7 = \mu^*(\{blau\})$. Analoges gilt natürlich für die gelben Murmeln, da sie unter Symmetrieüberlegungen keine andere Rolle als die blauen spielen.

Damit wird also unser Wissen mittels eines Intervalls von Wahrscheinlichkeiten repräsentiert, dessen Grenzen die unteren und oberen Wahrscheinlichkeiten sind. Die Idee hinter dem Vorgehen, Wahrscheinlichkeitsintervalle statt fixierte Wahrscheinlichkeiten zu betrachten, besteht darin, dass die eigene Unsicherheit so groß ist, dass nicht einmal die Wahrscheinlichkeiten bestimmt werden können. Eigentlich dienen Wahrscheinlichkeiten dem Zweck, mit jeder Art von Unwissen umgehen zu können. Wieso sollten sie hier versagen? Die obige Situation hätte gänzlich ohne Verwendung von oberen und unteren Wahrscheinlichkeiten modelliert werden können und zwar ganz einfach, indem man auf dem unbekannten Parameter wieder ein Wahrscheinlichkeitsmaß ansetzt[9]. Damit erhält man dann ein Produktwahrscheinlichkeitsmaß,

[7] Dieses Beispiel stammt aus [95].

[8] $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\{rot\}) = 0,3$, $\mu(\{gelb, blau\}) = 0,7$, $\mu(\{rot, gelb, blau\}) = 1$

[9] Dass hierbei womöglich das Indifferenzprinzip zum Zuge kommt, darf einen nicht bedenklich stimmen, da ja auch die unteren und oberen Wahrscheinlichkeiten letztendlich nichts über die blauen Murmeln verraten. Halpern erwähnt, dass man eventuell davon Abstand nehmen möchte, auf die

welches Zuweisungen für die Anzahlen der blauen Murmeln vergibt und auch noch den zusätzlichen Vorteil hat, dass Konditionierung auf eine bestimmte Zahl x der blauen Murmeln wieder das Wahrscheinlichkeitsmaß ν_x liefert. Aufgrund dieser Erfassung mittels gewöhnlicher Wahrscheinlichkeiten wird die unmittelbare epistemologische Relevanz von oberen und unteren Wahrscheinlichkeiten nicht deutlich.
Abschließend sei noch erwähnt, dass innere Maße eine Eigenschaft besitzen, die im Hinblick auf „Dempster-Shafer-Glaubensfunktionen" von besonderem Interesse ist, nämlich wie sich den Vereinigungen von Ereignissen zugewiesene Zahlenwerte aus den Zahlenwerten der Einzelereignisse zusammensetzen:

$$\mu_*(\cup_{i=1}^n U_i) \geq \sum_{i=1}^{n} \sum_{\{I\subseteq\{1,\ldots,n\}:|I|=i\}} (-1)^{i+1}\mu_*(\cap_{j\in I} U_j).$$

Man merkt, dass die Ungleichung an die Inklusions-Exklusions-Regel für Wahrscheinlichkeiten erinnert, wobei dort Gleichheit herrscht[10]. Etwas abgewandelt gilt für äußere Maße $\mu^*(\cap_{i=1}^n U_i) \geq \sum_{i=1}^n \sum_{\{I\subseteq\{1,\ldots,n\}:|I|=i\}} (-1)^{i+1}\mu^*(\cup_{j\in I} U_j)$.

blauen statt die roten Murmeln zu wetten, da ja vielleicht gar keine vorhanden sind. Hierzu muss aber nur bemerkt werden, dass sogar mehr davon als rote Murmeln enthalten sein könnten, was einen letztendlich wieder zu einer probabilistischen Betrachtung führt.

[10]Diese Regel, welche sich direkt aus mengentheoretischen Überlegungen ergibt, beschreibt bekanntlich, wie man die Wahrscheinlichkeit einer Vereinigung als Summe der Wahrscheinlichkeiten von Schnitten berechnet: $\mu(\cup_{i=1}^n U_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{\{I\subseteq\{1,\ldots,n\}:|I|=i\}} (-1)^{i+1}\mu(\cap_{j\in I} U_j)$

3.1.2 Dempster-Shafer-Glaubensfunktionen

Nun widmen wir uns den sogenannten „Dempster-Shafer-Glaubensfunktionen", welche von Dempster [46] eingeführt und Shafer [197] weiterentwickelt wurden. Eine Glaubensfunktion Bel bildet von der Potenzmenge der möglichen Welten W in das abgeschlossene Intervall reeller Zahlen von 0 bis 1 ab und erfüllt in Analogie mit den Kolmogorov-Axiomen die folgenden drei Eigenschaften:

1. $Bel(\emptyset) = 0$

2. $Bel(W) = 1$

3. $Bel(\cup_{i=1}^n U_i) \geq \sum_{i=1}^n \sum_{\{I \subseteq \{1,\ldots,n\}:|I|=i\}} (-1)^{i+1} Bel(\cap_{j \in I} U_j)$

Die ersten beiden Eigenschaften sind vor dem Hintergrund der Standardwahrscheinlichkeitsrechnung nur natürlich, aber bei der dritten erkennen wir die abgeänderte Inklusions-Exklusions-Regel, was insbesondere heißt, dass jedes innere Maß auch eine Dempster-Shafer-Glaubensfunktion darstellt. Wahrscheinlichkeiten sind demnach ebenfalls Spezialfälle von Dempster-Shafer-Glaubensfunktionen, wobei zu bemerken ist, dass beliebige Glaubensfunktion nicht wie gewöhnliche Wahrscheinlichkeitsmaße schon durch ihre Werte auf Elementen von W bestimmt werden; daher können sie nicht als Funktionen auf W aufgefasst werden. Die duale Struktur zur Glaubensfunktion ist die „Plausibilitätsfunktion" $Plaus$, welche durch folgende Beziehung definiert wird:

$Plaus(U) := 1 - Bel(\overline{U})$.

Es folgt unmittelbar, dass $Plaus$ die gleichen Eigenschaften wie Bel erfüllt, wenn man bei der dritten Schnitt und Vereinigung von Mengen vertauscht[11]. Glaubens- und Plausibilitätsfunktion haben das gleiche Verhältnis zueinander wie inneres und äußeres Maß[12], was dann nach sich zieht, dass für alle Elemente U von $\mathcal{P}(W)$ die Ungleichung $Bel(U) \leq Plaus(U)$ gilt und man damit das abgeschlossene Intervall von $Bel(U)$ bis $Plaus(U)$ wiederum als Unsicherheitsbereich für eine Wahrscheinlichkeit interpretieren kann. Dieser Zusammenhang kann noch etwas präzisiert werden, denn wie Dempster zeigte, gilt der folgende Sachverhalt:

Falls mit einer Glaubensfunktion Bel die folgende Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\mathcal{P}_{Bel} = \{\mu : \mu(U) \geq Bel(U) \, \forall U \subseteq W\}$ assoziiert wird, dann gilt $Bel = (\mathcal{P}_{Bel})_*$, $Plaus = (\mathcal{P}_{Bel})^*$.

---

[11] $Plaus(\cap_{i=1}^n U_i) \geq \sum_{i=1}^n \sum_{\{I \subseteq \{1,\ldots,n\}:|I|=i\}} (-1)^{i+1} Plaus(\cup_{j \in I} U_j)$, $Plaus(W) = 1$, $Plaus(\emptyset) = 0$

[12] Dieser Zusammenhang wurde erstmals in Beiträgen von Fagin/Halpern [64] und Ruspini [184] thematisiert.

Hierbei ist festzuhalten, dass die Umkehrung nicht gilt, da im Allgemeinen noch andere Mengen diese Eigenschaft haben.

Interessant ist nun, dass diese Glaubensfunktionen Teil einer „Theorie der Hinweise" (theory of evidence) sind, in welcher „Massenfunktionen" die fundamentale Rolle spielen. Diese sind wiederum Funktionen, die von der Potenzmenge der möglichen Welten W in das abgeschlossene Intervall reeller Zahlen von 0 bis 1 abbilden, aber einen deutlichen Unterschied zu Wahrscheinlichkeiten aufweisen, da sie durch die Eigenschaften $m(\emptyset) = 0$ und $\sum_{U \subseteq W} m(U) = 1$ charakterisiert werden. Die erste Bedingung ist harmlos, aber die zweite Forderung ist genauer zu betrachten. Durch sie können Teilmengen einer Menge eine größere Masse als die gesamte Menge zugewiesen bekommen: Etwa kann für die Menge $W = \{a, b\}$ die Zuweisung $m(\{a\}) = 0,6$, $m(W) = 0,4$ gelten. Dies bedeutet aber nicht, dass $m(\{b\}) = 0,4$ ist, denn sie muss null sein. Jeder Massenfunktion m kann man nun eine Glaubens- und eine Plausibilitätsfunktion zuordnen:

$Bel_m(U) = \sum_{U':U' \subseteq U} m(U')$ beziehungsweise $Plaus_m(U) = \sum_{U':U' \cap U \neq \emptyset} m(U')$.

Falls bei der Massenfunktion nur einelementige Mengen positive Masse haben, so erhält man als Glaubensfunktion ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Man kann $Bel_m(U)$ als Summe aller Hinweise, die U unterstützen, und $Plaus_m(U)$ als die Summe der aller Hinweise, die U nicht widersprechen, auffassen. Es ist bekannt, dass zwischen Glaubens- und Massenfunktionen eine 1-zu-1-Korrespondenz besteht, die auf Shafer zurückgeht[13].

Grundlegend ist nun, wie Hinweise in Form von Massenfunktionen durch die „Kombinationsregel" (rule of combination) von Dempster miteinander verbunden werden können, was letztendlich den Kern der „Dempster-Shafer-Theorie der Hinweise" ausmacht. Die Notwendigkeit einer solchen Regel kann man intuitiv damit begründen, dass man Hinweise von zwei unabhängigen Quellen miteinander verbinden möchte. Aus zwei gegebenen Massenfunktionen m_1 und m_2 kann man deren Kombination $m_1 \oplus m_2$ bilden, falls es mindestens zwei nichtdisjunkte Mengen U_1, U_2 mit $m_1(U_1)m_2(U_2) > 0$ gibt, was dem Umstand entsprechen soll, dass es aus den beiden Informationsquellen mindestens ein kompatibles Hinweispaar gibt. Unter dieser Voraussetzung ist $m_1 \oplus m_2$ wie folgt definiert:

$m_1 \oplus m_2(\emptyset) := 0$

$m_1 \oplus m_2(U) := (\sum_{U_1,U_2:U_1 \cap U_2 = U} m_1(U_1)m_2(U_2))/(\sum_{U_1,U_2:U_1 \cap U_2 \neq \emptyset} m_1(U_1)m_2(U_2)))$.

Diese Definition trägt der Anschauung Rechnung, dass zwei Hinweise für eine Tatsache U sprechen, falls sie diese als ihren Konsens vermitteln. Die Intuition von

[13] Damit wird auch klarer, warum Glaubensfunktionen im Allgemeinen nicht schon durch die Werte auf den einelementigen Mengen eindeutig festgelegt werden.

unabhängigen Ereignissen[14] liegt der Definition zugrunde, weshalb hier das Produkt der Massen zur Geltung kommt; jedoch muss noch entsprechend renormalisiert werden, da inkompatible Hinweispaare ignoriert werden. Zur Massenfunktion $m_1 \oplus m_2$ kann man wieder eine entsprechende Glaubensfunktion assoziieren. Die Addition $\oplus$ ist assoziativ und kommutativ, was der Vorstellung entspricht, dass es keine Rolle spielt, in welcher Reihenfolge die Informationen verwertet werden. Mit diesem formalen Rahmen kann man leisten, was man auch sonst für vernünftig hält, nämlich dass eine wiederholte Beobachtung eines Sachverhalts den Wert der Glaubensfunktion in diesen via einer mehrfach kombinierten Massenfunktion, welche die gehäufte Information widerspiegeln soll, an die obere Grenze 1 annähert. Grundsätzlich gilt hierbei, dass sich konsistente Hinweise verstärken, aber sich widersprüchliche gegenseitig abschwächen.

Nachdem bei der Vorstellung der Theorie immer etwas vage die Bezeichnungen „Masse" und „Hinweis" verwendet wurden, muss, bevor wir zu Fragen der Interpretation übergehen, nochmals bemerkt werden, dass Glaubensfunktionen formal eine Verallgemeinerung von Wahrscheinlichkeitsmaßen darstellen. Zudem kann bei geeigneter Anwendung die bayesianische Schlussweise mit Hilfe der Kombinationsregel vollständig emuliert werden[15].
Was bedeutet dies aber für eine mögliche Interpretation der Werte der Glaubensfunktionen[16]? Wenn eine Struktur eine andere formal in dem Sinne verallgemeinert,

[14] Üblicherweise werden zwei Ereignisse als „unabhängig"bezeichnet, wenn sich die Wahrscheinlichkeit ihrer Konjunktion als Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten berechnet. Dazu später mehr in Unterabschnitt 2.2 dieses Kapitels.

[15] Ausgehend von den Dempster-Shafer-Glaubensfunktionen entwickelt Monney in „A Mathematical Theory of Arguments for Statistical Evidence" [160] die sogenannte „theory of hints", welche eine Variante der Dempster-Shafer Theorie der Hinweise darstellt. Die Motivation dafür fand er bei der „fiducial theory" von Fisher. Während man beim gewöhnlichen bayesianischen Vorgehen Anfangswahrscheinlichkeiten benötigt, die dann durch erlangte Informationen geeignet modifiziert werden, ist das bei der Fiducial Theory für eine bestimmte Problemklasse, welche genauer von Fisher in „Inverse Probability" [70] beschrieben wird, nicht notwendig; es stellt sich heraus, dass die so gewonnenen Endwahrscheinlichkeiten dem Bayesansatz mit uniformen Anfangswahrscheinlichkeiten entsprechen. Dieser Zusammenhang, welcher schon von Dempster in [47] diskutiert wurde, wird von Monney umfassend erweitert, indem er die Struktur der „Generalized Functional Models" (GFMs) einführt, welche die jeweilige Situation modellieren und durch „hints" bewerten. Mit ihnen lässt sich das Folgende leisten: Nicht nur entspricht die „support function" (hier die alternative Bezeichnung für Glaubensfunktion, wobei deren duale Struktur wiederum als Plausibilitätsfunktion benannt wird) eines GFMs den bayesianischen Endwahrscheinlichkeiten bei Verwendung von uniformen Anfangswahrscheinlichkeiten, sondern durch die Hinzunahme eines „precise hints", welcher die Anfangsverteilung kodiert, kann die bayesianische Schlussweise vollständig emuliert werden. Zusätzlich gibt es noch zwei weitere vorteilhafte Aspekte. Erstens erlauben sie nicht nur die Abwägung einzelner, sondern auch kombinierter Hypothesen gegeneinander, indem sie den Quotienten der zugehörigen Plausibilitätsfunktionen statt der Likelihoods betrachten. Zweitens beinhalten die GFMs mehr Information als die reinen bayesianischen Verteilungsmodelle (unterschiedliche GFMs können das gleiche Verteilungsmodell induzieren), was es ermöglicht, eine ausgereiftere Repräsentation von Zufallsmechanismen zu erhalten.

[16] In dem Verständnis, dass Werte von Glaubens- und Plausibilitätsfunktionen in eine direkte Beziehung miteinander gesetzt werden, ist davon auszugehen, dass die Interpretation der Werte der

dass sie die ursprüngliche als Spezialfall beinhaltet, so überträgt sich jede Deutung der allgemeineren Struktur auf die spezielle, da diese ebenfalls die charakteristischen Eigenschaften besitzt. Falls also den Glaubensfunktionen eine Interpretation innewohnt, die bei den Konnotationen des Wahrscheinlichkeitsbegriffes nicht präsent war, so müssen wir diese nachträglich auch den Wahrscheinlichkeiten zuweisen und dabei immer daran denken, dass uns der Blick hierauf nur mittels einer Verallgemeinerung der formalen Struktur frei wurde. Aber gibt es eine solche überhaupt?
Dazu scheint es hilfreich, die Meinung von Shafer aus „Perspectives on the theory and practice of belief functions" [199] als einem der Mitbegründer der Glaubensfunktionen zu konsultieren, worin er ausdrücklich die Notwendigkeit passender Metaphern anerkennt, um Glaubensfunktionen in weltbezogenen Situationen verstehen zu können. Doch welche ist für ihn die Adäquateste? Wie der Name der Struktur schon nahelegt, weist er deutlich darauf hin, dass man sich die Werte der Glaubensfunktion primär von einer subjektiven Wahrscheinlichkeit abgeleitet vorstellen soll. Für ihn ist nämlich die einfachste und effektivste Metapher für das, was hier geschieht, die eines Zeugen, der einen gewissen Grad an Verlässlichkeit aufweist: Die Aussage des Zeugen wird mit einem Glaubensgrad bewertet; und alle anderen Propositionen erhalten den Glaubensgrad null, da über diese keine Informationen erlangt wurden[17]. Damit lassen sich dann beliebig komplexe Glaubensfunktionen als Bewertung mehrerer Aussagen auffassen.
Im Sinne der bayesianischen Expertenprinzipien spricht nichts dagegen, die Werte der Glaubensfunktionen auch mit Hilfe von objektiven Wahrscheinlichkeiten zu verstehen, womit man gewissermaßen auch „die Natur" als einen „Zeugen" begreift. Dies wird auch von Shafer anerkannt, indem er auf die weitere Möglichkeit, auf objektive Wahrscheinlichkeiten Bezug zu nehmen, hinweist. Während er also Wahrscheinlichkeiten eine sowohl subjektive als auch objektive Rolle beim Verständnis der Massen zugesteht, betont er, dass es keine andere Interpretation für die Werte der Glaubensfunktionen gebe, die genauso so nützlich sei, denn Dempsters Kombinationsregel könne man am besten durch ein probabilistisches Verständnis des Konzeptes des Hinweises (evidence) rechtfertigen.
Das heißt also, dass die Interpretation der Massen entscheidend auf einem vorher bestehenden Verständnis des Wahrscheinlichkeitsbegriffes aufbaut und damit nichts fundamental Neues bietet. Es ist geradezu üblich, die Massen in einer absolut herkömmlich wahrscheinlichkeitstheoretisch geprägten Auffassung zu deuten, wobei es dem Anwender überlassen bleibt, sich für eine konkrete Auslegung zu entscheiden. Dementsprechend äußert sich auch Shafer in [200] dazu, indem er sagt, dass die Wahrscheinlichkeitstheorie den Vorteil habe, drei Interpretationen[18] miteinander zu verbinden: „ ... that the mathematical theory of probability is really the theory of an ideal picture in which belief, fair price and knowledge of the long run are

Glaubensfunktionen auch für die der Plausibilitätsfunktionen gilt.

[17]Natürlich muss noch die restliche Masse durch eine „Default-Bewertung" auf W gelegt werden, um die Normalisierung einzuhalten.

[18]Diese wurden bereits in Kapitel 2 Abschnitt 1 dargestellt.

bound together."[19]. Auch bemerkt er, dass der Pascal'sche Wahrscheinlichkeitsbegriff über eine viel stärkere semantische Konzeption verfüge: „Classical logic, the classical frequentism and Bayesian theory of probability all have a stronger conception of semantics. In all three cases we can say what statements of the theory mean without reference to how they are obtained.". Die fehlende eigenständige Interpretation stelle aber für die Bedürfnisse der Künstlichen Intelligenz kein Problem dar: „I do not believe, however, that such a process-independent semantics is a reasonable goal for Artificial Intelligence.". Somit sieht er die Eignung der Glaubensfunktionen für technische Zielsetzungen nicht eingeschränkt, was insofern einleuchtet, als dass mögliche Interpretation von Automaten gar nicht erfasst werden können.
Der eigentliche Vorteil der Glaubensfunktionen gegenüber Wahrscheinlichkeitsmaßen bestehe darin, dass sie eine ausgereiftere Darstellung von Ignoranz zulassen: etwa ist die Situation, wo man Hinweise bezüglich der Fairness einer Münze hat, von der zu unterscheiden, wo man überhaupt nichts über ihre Masseverteilung weiß[20]. Dazu ist aber zu bemerken, dass in ersterer Situation dem epistemischen Subjekt auch nicht viel mehr geholfen ist und man zudem wie im Murmelbeispiel des vorigen Unterabschnitts einfach ein weiteres Wahrscheinlichkeitsmaß auf die Masseverteilung ansetzen kann, welches dann in einem Produktwahrscheinlichkeitsmaß resultiert[21].

Zusammenfassend lässt sich damit feststellen, dass Glaubensfunktionen eine sehr allgemeine Struktur darstellen, die Wahrscheinlichkeitsmaße als Spezialfälle beinhalten. Jedoch muss bemerkt werden, dass sie bezüglich einer Interpretation unumgänglich auf Konnotationen der herkömmlichen Pascal'schen Wahrscheinlichkeit angewiesen sind, was bedeutet, dass sie keinen unabhängigen Wahrscheinlichkeitsbegriff konstituieren können.

[19] Hierbei muss es sich bei „fair price" um eine versehentliche doppelte Nennung der bayesianischen Deutung handeln, was im nächsten Zitat deutlich wird.

[20] Nur im ersten Fall kommt eine nichttriviale Massenfunktion m zum Einsatz.

[21] Es sei t der Parameter, welcher die Masseverteilung beschreibt, dann ergeben sich aus Konsistenzüberlegungen als Wahrscheinlichkeiten für Kopf und Zahl t beziehungsweise $1 - t$. Auf t kann man erneut ein Wahrscheinlichkeitsmaß ansetzen.

3.1.3 Möglichkeitsmaße

Die sogenannten „Möglichkeitsmaße" (possibility measures), welche ausgehend von der „fuzzy logic" von Zadeh eingeführt wurden[22], stellen einen weiteren Ansatz zur Datenrepräsentation dar. Die bisher vorgestellten alternativen Konstrukte wurden durch Forderungen charakterisiert, die Wahrscheinlichkeitsmaße insbesondere auch erfüllten. Dies trifft jetzt aber nicht mehr zu: Möglichkeitsmaße $Poss$ sind Abbildungen von einer Algebra von W in das abgeschlossene Intervall von 0 bis 1 mit den definierenden Eigenschaften

1. $Poss(\emptyset) = 0$

2. $Poss(W) = 1$

3. $Poss(U \cup V) = max(Poss(U), Poss(V))$.

Während uns die ersten beiden Eigenschaften vertraut sind, kehrt sich die Letzte grundlegend von der bestehenden Rechenregel für Wahrscheinlichkeiten ab[23]. Dennoch lässt sich in Analogie mit den Wahrscheinlichkeitsmaßen auf endlichen Mengen folgern, dass der Möglichkeitswert einer Menge durch die Möglichkeitswerte ihrer Elemente bestimmt wird: $Poss(U) = max_{u \in U} Poss(u)$. Eine übliche Art Möglichkeitsmaße zu konditionieren[24] geht auf Dubois und Prade [55] zurück; sie wird mittels der Regel $Poss(B \mid A) = Poss(B \cap A)/Poss(A)$, vollzogen, welche erneut ein Möglichkeitsmaß liefert.

Die von Zadeh ausgearbeitete Struktur kann man jetzt erneut mit Hilfe des Dempster-Shafer-Ansatzes verstehen, was besonders deutlich wird, wenn man das zu den Möglichkeitsmaßen duale Konzept des „Notwendigkeitsmaßes" (necessity measure) Nec mit $Nec(U) := 1 - Poss(\overline{U})$ einführt. Denn wie man sich leicht vergegenwärtigt, sind Notwendigkeitsmaße Glaubensfunktionen; dementsprechend korrespondieren Möglichkeitsmaße zu Plausibilitätsfunktionen, was die Ungleichung $Nec(U) \leq Poss(U)$ impliziert. Weiterhin können wir feststellen, dass Möglichkeitsmaße eine echte Spezialisierung von Plausibilitätsfunktionen darstellen, da sie genau solchen entsprechen, mit denen eine „konsonante" (consonant) Massenfunktion[25] assoziiert wird[26]. Wie bereits erläutert wurde, kann spezielleren Strukturen natürlicherweise immer eine weitere Bedeutungsdimension innewohnen, weshalb Möglichkeitsmaße als Spezialfälle der Dempster-Shafer Theorie gesondert zu diskutieren sind. Im nächsten Unterabschnitt wird sich herausstellen, dass sich Möglichkeits-

[22] Dies geschah aufbauend auf [252] in [253].

[23] Anfänglich fordert man sie nur für disjunkte Mengen, jedoch gilt sie dann unmittelbar für beliebige Mengen.

[24] Tatsächlich gibt es in der Literatur unterschiedliche Verfahrensweisen.

[25] Eine Massenfunktion m ist genau dann konsonant, wenn $m(U) > 0$ und $m(U') > 0$ immer $U \subseteq U'$ oder $U' \subseteq U$ folgern lässt.

[26] Ein Beweis findet sich zum Beispiel in [53].

maße in „Rangfunktionen" übersetzen lassen. Auch wenn es sich hierbei dann um isomorphe Strukturen handelt, müssen die Deutungen nicht identisch sein, da die Strukturen eine unterschiedliche Form besitzen. Man denke hierbei nur in der Geometrie an eine gerade Linie, die sich stetig in eine beliebige Kurve überführen lässt. Offensichtlich werden aber mit beiden Objekten unterschiedliche Vorstellungen verbunden: eine Gerade steht für eine gewisse Härte, wohingegen eine Kurve „weicher" wirkt. Dementsprechend müssen Möglichkeitsmaße und Rangfunktionen getrennt voneinander untersucht werden.

Aber wie soll man nun eine auf der Skala $[0, 1]$ gemessene Möglichkeit verstehen? Zunächst ist nochmals festzustellen, dass Möglichkeiten eigentlich nicht in Abstufungen existieren, sondern bestehen oder nicht, was vermuten lässt, dass es sich hierbei wie bereits bei der klassischen Konzeption der Wahrscheinlichkeit erneut um einen unreflektierten Umgang mit dem Begriff „Möglichkeit" handelt. Doch wollen wir die von Zadeh gegebene Deutung genauer betrachten. Bei der Rechtfertigung der formalen Eigenschaften bleibt er etwas vage: Er sagt einfach, dass er die Vermutung habe, Möglichkeiten müssten sich im Sinne der Fuzzy Logic verbinden[27], gibt aber zu, dass dies lediglich eine Intuition darstelle, die mit Vorsicht zu genießen sei[28]. Vielleicht hilft es sein Beispiel zur Erläuterung des Unterschiedes zwischen Möglichkeiten in Abstufungen und Wahrscheinlichkeiten zu analysieren, um besser zu begreifen, was er unter Möglichkeiten versteht. In dem Beispiel gibt er eine Tabelle mit entsprechenden numerischen Werten für die Ereignisse an, dass ein gewisser Hans zum Frühstück eine bestimmte Anzahl an Eiern esse. Dabei veranschaulicht er den Umstand, dass eine geringe Möglichkeit die zugehörige Wahrscheinlichkeit[29] verkleinere, aber nicht umgekehrt. Sicherlich liegt es als ausgewachsener Mann innerhalb der Fähigkeiten von Hans, vier Eier zu essen, nur tut er es aus Gewohnheit nicht, was bedeutet, dass die Möglichkeit groß ist, aber die Wahrscheinlichkeit klein. Dagegen impliziert eine fehlende Befähigung, acht Eier zu essen, auch eine kleine Wahrscheinlichkeit. Wenn man diese gutturale Veranschaulichung nüchtern betrachtet, kommt man unweigerlich zu dem Schluss, dass es sich hier eigentlich um die Wahrscheinlichkeiten von zwei unterschiedlichen Situationen handelt: beim Bestehen beziehungsweise bei der Absenz einer bestimmten Absicht. Damit liegt hier dann eher ein zweistufiges Zufallsexperiment vor: das Fassen eines Entschlusses und dessen Umsetzung. Sicherlich könnte man den Wahrscheinlichkeitsbegriff ausschmücken, indem man sich für die Wahrscheinlichkeiten in den unterschiedlichen Stufen beeindruckende Bezeichnungen

[27] Dort gibt es nicht nur die Unterscheidung, *ob* ein Element einer Menge angehört, sondern auch zu welchem Grad in $[0, 1]$. Das erklärt das Maximum, denn bei der herkömmlichen Zugehörigkeit zu der Vereinigung von Mengen reicht es in einer der beiden Mengen enthalten zu sein. Das heißt also, dass das Maximum von Zugehörigkeitsgraden über den Zugehörigkeitsgrad zu einer Vereinigung entscheidet.

[28] Wenn man mehr Gewissheit über die Eigenschaften von Möglichkeiten in Abstufungen erlangen wollte, müsste man diese seiner Meinung nach operational, ähnlich wie Wahrscheinlichkeiten mittels Wettquotienten, abfragen. Wie wir aber bereits erwähnten, ist gerade diese Identifikation bei Wahrscheinlichkeiten sehr problematisch.

[29] Diese kann man sich hierbei etwa frequentistisch gedeutet denken.

ausdenkt, aber in dem Verständnis, dass grundlegende epistemologische Konzepte trotz ihrer Einfachheit einen größtmöglichen Erklärungsanspruch haben sollten, verbietet sich eine solche Pluralität. Im Endeffekt handelt es sich im Frühstücksszenario um eine Voraussage, die genauso gut, wenn nicht sogar besser, durch Wahrscheinlichkeiten artikuliert wird. Daher muss auch hier bemerkt werden, dass Möglichkeiten in Abstufungen im Vergleich zu Wahrscheinlichkeiten keinen unabhängigen epistemologischen Aspekt beleuchten und an sich wenig aufschlussreich wirken.

3.1.4 Rangtheorie

Die sogenannten „Rangfunktionen" (ranking functions)[30], welche in die natürlichen Zahlen abbilden, weisen große Ähnlichkeiten mit den Möglichkeitsmaßen auf. Diese wurden ursprünglich von Spohn in [216] in größerer Allgemeinheit als „ordinal conditional functions" eingeführt, wobei der Unterschied darin besteht, dass sie nicht nur Werte in $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, sondern beliebige Ordinalzahlen annehmen können. Dafür, als Wertebereich die natürlichen Zahlen und ∞ statt beliebiger Ordinalzahlen zu betrachten, spricht die Tatsache, dass sich dann die Berechnung der Ränge von unendlichen Vereinigungen von Propositionen leichter handhaben lässt. Wie bereits erwähnt wurde, sind nur endliche Szenarien für uns interessant, trotzdem werden wir als Wertebereich die natürlichen Zahlen betrachten, da diese eine „natürliche" Wahl darstellen.
Im einfachsten Fall sind Rangfunktionen Abbildungen κ von einer Algebra $\mathcal{A}$ über W nach $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ mit den charakteristischen Eigenschaften

1. $\kappa(\emptyset) = \infty$

2. $\kappa(W) = 0$

3. $\kappa(U \cup V) = min(\kappa(U), \kappa(V))$.

Analog zu den Möglichkeitsmaßen wird die dritte Eigenschaft anfänglich nur für disjunkte Mengen gefordert, kann aber dann sofort für alle gefolgert werden. Die Rangfunktionen haben wie die Möglichkeitsmaße die zusätzliche Eigenschaft, dass die Ränge von Mengen schon eindeutig durch ihre Elemente bestimmt werden: $\kappa(U) = min_{u \in U} \kappa(u)$. Die Ähnlichkeit von Rangfunktionen mit Möglichkeitsmaßen ist geradezu frappierend und der bestehende Unterschied lässt sich durch eine einfache Skalentransformation auflösen: durch Anwendung des negativen Logarithmus erhält man aus einem Möglichkeitsmaß eine Rangfunktion.
Da wir gleich sehen werden, dass die Rangfunktionen wertvolle Dienste bei der Darstellung des Wandels von epistemischen Zuständen leisten, ist deren Konditionierungsmechanismus von besonderem Interesse. Für eine Proposition U mit $\kappa(U) \neq \infty$ ist die auf U „bedingte Rangfunktion" $\kappa_U = \kappa(\cdot \mid U)$ wiederum eine Abbildung von $\mathcal{A}$ nach $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, die folgendermaßen definiert ist:

$$\kappa(V \mid U) := \kappa(V \cap U) - \kappa(U).$$

In der Bezeichnung „bedingte Rangfunktion" war schon implizit enthalten, dass es sich, wie man sich leicht klarmacht, wiederum um eine Rangfunktion handelt. Zudem gilt $\kappa(U_1 \cap U_2 \mid U_3) = \kappa(U_1 \mid U_2 \cap U_3) + \kappa(U_2 \mid U_3)$, falls $\kappa(U_2 \cap U_3) \neq \infty$ ist, was

[30] In seinem Übersichtsartikel „A Survey of Ranking Theory" [219] hat Spohn als Begründer der Rangtheorie seine Terminologie reorganisiert und die neue Bezeichnung „negative Rangfunktion" (negative ranking function) vergeben; doch wollen wir hier an der älteren Bezeichnung festhalten, um die Konsistenz mit bisherigen Arbeiten zu wahren.

die direkte Übersetzung der Regel $P(U_1 \cap U_2 \mid U_3) = P(U_1 \mid U_2 \cap U_3)P(U_2 \mid U_3)$ in den formalen Rahmen der Rangtheorie darstellt. Solche Analogien lassen sich zuhauf finden, jedoch gestaltet sich die Übersetzung nicht immer so einfach wie im obigen Fall. Und bezüglich Möglichkeitsmaßen erkennt man, dass eine Anwendung des Logarithmus auf die Dubois-Prade-Konditionierung wieder die strukturelle Äquivalenz offenlegt.
Aber speziell in der Rangtheorie wird aufbauend auf dieser Konditionalisierung die sogenannte „$A \rightarrow x$-Konditionalisierung" $\kappa_{A\rightarrow x}$ mit einer Bezugsproposition $A \in \mathcal{A}$ ($\kappa(A), \kappa(\overline{A}) < \infty$) und einem Parameter $x \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ für eine nichtleere Proposition $B \in \mathcal{A}$ definiert als

$\kappa_{A\rightarrow x}(B) := \kappa(B \mid A)$, falls $B \subseteq A$,

beziehungsweise

$\kappa_{A\rightarrow x}(B) := \kappa(B \mid \overline{A}) + x$, falls $B \subseteq \overline{A}$.

Für eine beliebige nichtleere Proposition B wird $\kappa_{A\rightarrow x}(B)$ über die Vereinigungsregel, also die dritte Eigenschaft von Rangfunktionen, festgelegt. Bei $\kappa_{A\rightarrow x}$ handelt es sich erneut um eine Rangfunktion, wenn man noch die Setzung $\kappa_{A\rightarrow x}(\emptyset) = \infty$ vornimmt[31].

Nach dieser formalen Einführung sind nun die Bedeutungsdimensionen der Rangfunktionen zu diskutieren. Zunächst sei aber noch darauf verwiesen, wie man Ränge mit Hilfe von Wahrscheinlichkeiten interpretieren kann. Wenn man „unendlich kleine Wahrscheinlichkeiten"[32] als Potenzen einer gemeinsamen infinitesimalen Basis schreibt, kann man die Exponenten als Ränge verstehen, da sich bei Summen von Potenzen sehr kleiner Zahlen nur der minimale Exponent im Ergebnis bemerkbar macht; das entspricht der Minimumsregel bei Vereinigungen. Jedoch ist das nur eine Beziehung auf der formalen Ebene.
Auch wenn Rangfunktionen im Gegensatz zu Wahrscheinlichkeitsmaßen in die natürlichen Zahlen zusammen mit ∞ statt dem abgeschlossenen Intervall von null bis eins abbilden, handelt es sich in beiden Fällen um lineare Ordnungen. Welche andersartige Bedeutung sollte diesen Zahlen nun zukommen? Den Werten der Rangfunktionen ist die Interpretation als Grad der Überraschung in dem Sinne eigentümlich, dass 0 „nicht überraschend" bedeuten soll und höhere Werte als immer überraschender bis zur absoluten Unmöglichkeit ∞ aufzufassen sind. Die Minimumsbildung bei Vereinigungen soll dem Umstand Rechnung tragen, dass eine unspezifische Proposition weniger überraschend anmutet als eine spezifische. Eine derartige Deutung wurde

[31] Die leere Menge wurde deshalb ausgenommen, weil jede beliebige Menge sie enthält und ihr dementsprechend kein eindeutiger Fall zugeordnet ist. Die Setzung ist aber insofern konsistent, als dass sich jeweils der gleiche Rang ∞ ergäbe.

[32] Dies kann mathematisch mit Hilfe von Nichtstandard-Analysis formalisiert werden.

erstmals von Shackle [196] mit seinen „Funktionen der potenziellen Überraschung“[33] in dem Verständnis zum Ausdruck gebracht, dass der Grad der potenziellen Überraschung Überzeugung in die Falschheit eines Satzes ausdrückt und damit Grade des Unglaubens widerspiegelt. Im Vergleich mit der Deutung von Wahrscheinlichkeiten als Glaubensgraden muss man allerdings kritisch feststellen, dass es wohl auf eine Haarspalterei hinausläuft, wenn man die Bezeichnungen „große Überraschung“ beziehungsweise „starker Unglaubensgrad“ gegen „schwachen Glaubensgrad“ abgrenzen möchte. Demnach besteht weiterhin die Frage, ob Rangfunktionen einen genuinen Eigenbeitrag zur Repräsentation von Informationen liefern können. Spohn reflektiert in seiner Arbeit „A survey of ranking theory“ als Erfinder der Rangfunktionen über das Verhältnis von Wahrscheinlichkeiten und Rängen. Wir wollen einige seiner Standpunkte darstellen und diskutieren.

Der wichtigste Vorteil der Rangfunktionen bestehe laut Spohn darin, dass sie viel besser die Verbindung zur traditionellen Epistemologie, welche sich mit dem Glauben selbst beschäftigt, herstellen können als Wahrscheinlichkeiten. Traditionell werden epistemische Zustände von Menschen unter anderem mittels sogenannten „belief sets“[34] modelliert, die den Glauben einer Person mit Hilfe von Mengen von Propositionen[35] widerspiegeln, welche die Eigenschaften haben, dass sie *konsistent* und *deduktiv abgeschlossen* sind. Dies bedeutet erstens, dass endliche Konjunktionen von Propositionen aus dem Belief-Set nicht leer sind, und zweitens, dass immer, wenn eine solche Konjunktion in einer Proposition enthalten ist, auch diese zum Belief-Set gehören muss.
Die grundlegende Feststellung besteht nun darin, dass eine durch $\mathcal{B}_\kappa = \{A \in \mathcal{A} \mid \kappa(\overline{A}) > 0\}$ definierte Menge von Propositionen genau diese beiden Eigenschaften hat: Falls $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}_\kappa$, dann ist $A_1 \cap \cdots \cap A_n \neq \emptyset$; falls $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}_\kappa$ und $A_1 \cap \cdots \cap A_n \subseteq B \in \mathcal{A}$ gelten, impliziert dies $B \in \mathcal{B}_\kappa$[36].
Damit besitzen Rangfunktionen den Vorteil, dass man mit ihnen problemlos Belief-Sets, wie man sie aus der traditionellen Epistemologie kennt, definieren kann. Das ist auch der Grund, warum sie den Brückenschlag zu der „AGM belief revision theory“ und „nonmonotonic reasoning“ herstellen können; dies wird nun detailliert für Sätze geschildert, da die AGM-Theorie gewöhnlicherweise auf formalen Sprachen statt möglichen Welten operiert. Bezüglich eines Belief-Sets S kann ein Satz A ent-

[33] Diese Funktionen entsprechen im Wesentlichen den Rangfunktionen, jedoch ist dieser Ansatz technisch nicht so ausgefeilt wie der von Spohn, denn beispielsweise gibt es keinen Konditionalisierungsmechanismus.

[34] Wir wollen hierbei auf eine deutsche Übersetzung verzichten, da sich nur schwerlich ein adäquater Ausdruck finden lässt. Auch in Fachkreisen wird üblicherweise die englische Bezeichnung übernommen.

[35] Als Alternative besteht auch die Möglichkeit, auf einer formalen Sprache zu arbeiten, jedoch wählen wir hier die möglichen Welten, da sie auch den Rangfunktionen zugrunde liegen. Wie bereits erwähnt wurde, lassen sich diese Formalismen ineinander überführen.

[36] Die erste Eigenschaft folgt, weil bezüglich einer Proposition und ihrem Komplement mindestens eine von beiden Propositionen den Rang null erhalten muss. Die zweite Eigenschaft ergibt sich direkt aus der Definition.

weder akzeptiert ($A \in S$), abgelehnt ($\overline{A} \in S$) oder unbestimmt (keiner der beiden Fälle trifft zu) sein[37]. Wenn man mit einem Belief-Set einen epistemischen Zustand beziehungsweise technischer betrachtet im Rahmen Künstlicher Intelligenz eine Datenbasis modelliert, geht es grundsätzlich darum, dass im weiteren Verlauf der Informationsanhäufung die folgenden prototypischen Modifikationen notwendig werden können: „Expansionen", „Kontraktionen" und „Revisionen". Bei einer Expansion wird ein unbestimmter Satz und seine Konsequenzen hinzugenommen, wohingegen bei einer Kontraktion ein bereits akzeptierter Satz B entfernt wird, was möglicherweise nach sich zieht, dass auch gewisse andere Sätze, die diesen implizieren, aufgegeben werden müssen. Wenn B direkt aus nur einem anderen Satz folgte, so muss er allein aufgegeben werden; konnte B aber nur unter Zuhilfenahme mehrerer Sätze gefolgert werden, hat man eine Wahlfreiheit, welcher Satz geopfert werden soll. Diese beiden Änderungen sind insofern konsistent, als dass kein Satz akzeptiert wird, der zu einem Widerspruch führt[38]. Dies kann aber bei einer Revision geschehen, bei der man $A \in S$ in $\overline{A} \in S$ abändert, was man so verstehen kann, dass zunächst ein widersprüchlicher Satz aufgenommen wird. In der Regel zieht das nach sich, dass man wiederum weitere Sätze aufgeben muss, um die Konsistenz zu wahren. Die Intuition, welche Kontraktionen und Revisionen unterliegt, ist diejenige, dass sich Sachverhalte, die man ursprünglich geglaubt hat, als falsch herausstellten; jeder wird so etwas schon einmal selbst erfahren haben. Zentral ist nun für die Aufgabe von Sätzen bei Kontraktionen und Revisionen Rationalitätspostulate aufzustellen, da man unter alleiniger Berücksichtigung der Konsistenz womöglich eine Wahlfreiheit hat; die führende Formulierung stammt von Alchourron, Gärdenfors und Makinson, deren Initialen die von ihnen ausgearbeitete Theorie bezeichnen[39]. Darin wird mittels „epistemic entrenchment", was bewertet, wie wertvoll die einzelnen Sätze für epistemische Zwecke sind, entschieden, welche Sätze einer minimalen Abänderung zum Opfer fallen sollen, um erneut die Struktur eines Belief-Sets zu garantieren. Wichtig ist nun festzustellen, dass die Rangtheorie die AGM-Theorie mittels der $A \to x$-Konditionalisierung korrekt formal darstellt und sogar verallgemeinert, denn insbesondere können iterierte Modifikationen des epistemischen Zustandes besser behandelt werden[40].

Es scheint nun, als gestalte sich die epistemische Dynamik für Wahrscheinlichkeitsverteilungen und Belief-Sets auf zwei völlig unterschiedliche Arten. Die Erlangung von Glauben stellt im traditionellen Sinne einen reversiblen Prozess dar, der das Belief-Set sowohl vergrößern als auch verkleinern kann, woher dann auch die Bezeichnung Nonmonotonic Reasoning rührt, da sich hier die Kardinalität des Belief-Sets in nicht monotoner Weise ändert. Was passiert dagegen bei der probabilistischen Konditionierung? Hier beginnt man bei einem regulären Wahrscheinlichkeitsmaß mit einer Menge, welche *alle* möglichen Welten darstellt. Wenn man nun Informationen

[37]Der Fall $A \in S$ und $\overline{A} \in S$ tritt aufgrund der Definition eines Belief-Sets nie ein.

[38]Es sei darauf hingewiesen, dass dies bei Expansionen nicht passieren kann, da dafür $\overline{A} \in S$ gelten hätte müssen.

[39]Für einen Überblick empfiehlt sich „Knowledge in Flux" von Gärdenfors [74].

[40]Vgl. [216].

in Form einer Proposition hinzugewinnt, so zieht das nach sich, dass alle möglichen Welten außerhalb der Bezugsproposition Wahrscheinlichkeit null erhalten, was einer Einschränkung aller möglichen Welten entspricht. Diese Einschränkung ist ein irreversibler Prozess. Zudem kann die Wahrscheinlichkeit einer Proposition, die im Verlaufe einer Konditionierung den Wert eins erreicht hat, nie wieder abgeändert werden[41].
Jedoch kann nicht nur die mögliche Reversibilität, sondern auch die Darstellung mit Hilfe von Belief-Sets als vorteilhaft ausgelegt werden, denn sie haben die schöne Eigenschaft, dass für zwei Sätze auch immer deren Konjunktion enthalten ist. Besondere Brisanz entfaltet dieser Umstand, wenn man Glauben, welcher im traditionellen Verständnis durch Inklusion im Belief-Set ausgedrückt wird, von Wahrscheinlichkeiten, welche ja Glaubens*grade* darstellen sollen, ableiten möchte. Dass dies nicht völlig unproblematisch ist, zeigt das Lotterieparadox [128]. Naiv könnte man denken, dass alle Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeit eine festgelegte Nähe zur eins aufweisen, ein Belief-Set bilden. Aber man stelle sich eine Lotterie vor, die eine große Anzahl von Losen, von denen genau eines gewinnen wird, ausgibt. Wenn man sich nun die Frage stellt, ob ein bestimmtes Los gewinnen werde, so ist man geneigt dies nicht anzunehmen, da die zugehörige Wahrscheinlichkeit zu gering ist. Diese Prozedur lässt sich für jedes einzelne Los durchführen und einen dann bei der gemeinsamen Betrachtung der Beurteilungen zu dem Schluss kommen, dass gar kein Los gewinnt, was aber natürlich nicht stimmt. Durch die Festlegung von Glauben über eine Schwellenwahrscheinlichkeit kann nicht die Konsistenz der Anschauungen im Sinne von Belief-Sets garantiert werden.

Somit scheinen die Superstruktur der Belief-Sets[42] und die mögliche Reversibilität klare Vorteile für das Rangkalkül zu sein. Doch gibt es wirklich keine Reversibilität für Wahrscheinlichkeitskonditionierungen und sind Belief-Sets auf probabilistischem Wege unerreichbar?
Zur Reversibilität könnte man bemerken, dass sie nicht notwendig sei, wenn die Informationen hinreichend gewissenhaft gesammelt wurden, denn dann können niemals Widersprüche auftreten, da bei der Wahrscheinlichkeitskonditionierung immer nur Einschränkungen der möglichen Welten betrachtet werden[43]. Das Problem ist aber, was unter „hinreichend gewissenhaft" zu verstehen ist. Außer logischen Tautologien ist nichts sicher, weshalb es a priori nicht auszuschließen ist, dass sich die Notwendigkeit ergibt, die Auswirkungen einer Konditionalisierung zu annullieren. Sicherlich könnte man einfach auf die vorherige Wahrscheinlichkeitsverteilung zurückgreifen, jedoch möchte man einen Weg finden, dies innerhalb eines Formalismus durch erneute Konditionierung zu vollziehen. Tatsächlich ist aber die Jeffrey-Konditionalisierung im Gegensatz zur Standardkonditionalisierung für reguläre Wahrscheinlichkeitsma-

[41] Das ist klar, da es sich um eine Einengung des Zustandsraumes handelt: Schließt eine Menge A die Menge B, auf die konditioniert wird, ein, so bekommt A die Wahrscheinlichkeit eins; keine weitere Einschränkung kann dies ändern.

[42] Die Belief-Sets bestehen zusätzlich zu der Bewertung durch Ränge.

[43] Dies wurde in Kapitel 2 Abschnitt 2 als „cut off and magnify" bezeichnet.

ße reversibel. Sie basiert als Konvexkombination zweier herkömmlicher Konditionierungen darauf, dass das zur Konditionierung verwendete Ereignis nicht als unumstößliche Wahrheit behandelt wird, sondern selbst eine probabilistische Gewichtung erfährt. Ist diese von null verschieden, so werden sämtliche Wahrscheinlichkeitswerte skaliert, ohne dass dabei einzelne Wahrscheinlichkeiten trivial werden. Sind zudem die Wahrscheinlichkeiten aller Elemente des Ergebnisraumes nichtextremal, kann ausgehend von einer beliebigen Wahrscheinlichkeitsverteilung jede andere durch einen Konditionierungsschritt erreicht werden, was insbesondere die Reversibilität der Modifikation bedeutet[44].
Wie bereits erwähnt wurde, ist die Voraussetzung dafür, dass sich die Wahrscheinlichkeit jeder möglichen Welt im Sinne einer reversiblen Dynamik ändern kann, die Regularität des Wahrscheinlichkeitsmaßes; die Wahrscheinlichkeit null kann selbst in der Jeffrey-Konditionalisierung nicht beseitigt werden, da es sich um eine Linearkombination aus gewöhnlichen Konditionierungen handelt. Diese Voraussetzung ist aber insofern kein Problem, als dass der Wert null vernünftigerweise für Unmöglichkeiten reserviert sein sollte und damit für einzelne mögliche Welten nicht in Frage kommt. Wieso sollte man denn eine Möglichkeit kategorisch ausschließen, wo sie doch gerade „möglich" ist? Dementsprechend sollte man die Eins nur Tautologien zuweisen[45]. Mit Hilfe dieser Einsicht kann man dann auch heuristisch erklären, weshalb es der AGM-Theorie in „Knowledge in Flux" nicht möglich ist, eine explizite formale Kinematik für die zugrunde liegenden probabilistischen Gewichtungen ihrer Belief-Sets zu etablieren[46]: Zugehörigkeit eines Satzes zu dem Belief-Set wird mittels Wahrscheinlichkeit eins definiert[47]. Das harmoniert natürlich mit den Eigenschaften, die man von Belief-Sets erwartet (siehe Lotterieparadox), allerdings ist die Deutung von Glauben als Wahrscheinlichkeit eins deutlich übertrieben, was auch der Grund ist, warum bezüglich der AGM-Theorie das Rangkalkül deutlich einer probabilistischen Modellierung überlegen ist.
Nachdem wir erkannt haben, dass für reguläre Wahrscheinlichkeitsmaße eine Reversibilität bezüglich der Konditionierung etabliert werden kann, gehen wir nun zu der Frage über, wie es um ein Analogon für die Superstruktur der Belief-Sets steht. Jedoch wollen wir noch festhalten, dass wir von nun an alle Konditionierungen im

[44]Wie man leicht durch Anwendung der Definition sieht, macht eine $(P(U), U)$-Jeffrey-Konditionalisierung eine beliebige (α, U)-Jeffrey-Konditionalisierung von P, deren Wahrscheinlichkeitsmaß P_1 sei, wieder rückgängig: $P_2(V) = P(U)P_1(V|U) + P(\overline{U})P_1(V|\overline{U}) = P(U)[(\alpha \times P(V \cap U|U) + (1-\alpha) \times P(V \cap U|\overline{U}))/(\alpha \times P(U|U) + (1-\alpha) \times P(U\ |\overline{U}))] + P(\overline{U})[(\alpha \times P(V \cap \overline{U}|U) + (1-\alpha) \times P(V \cap \overline{U}|\overline{U}))/(\alpha \times P(\overline{U}|U) + (1-\alpha) \times P(\overline{U}|\overline{U}))] = P(U)P(V|U) + P(\overline{U})P(V|\overline{U}) = P(V)$

[45]Hat eine mögliche Welt die Wahrscheinlichkeit eins, so muss es in einem nichttrivialen Ergebnisraum eine andere mit Wahrscheinlichkeit null geben.

[46]Lediglich die Expansion kann mittels der Standardkonditionalisierung beschrieben werden. Hierbei darf man sich nicht verwirren lassen, dass eine Restriktion gerade der Expansion entspricht. Durch die Einengung der Konditionierung haben nicht nur alle Sätze mit Wahrscheinlichkeit eins weiterhin maximale Wahrscheinlichkeit, sondern es können auch weitere hinzukommen. Jedoch können für Revisionen und Kontraktionen in Unterkapitel 5.10 „Construction of probabilistic revision functions" keine expliziten Konstruktionen angegeben werden.

[47]Dies ergibt insofern Sinn, als dass in ihrem satzbasierten Ansatz mehrere Sätze maximale Wahrscheinlichkeit haben können.

Sinne von Jeffrey deuten werden, da dies aus den oben erwähnten Gründen viel vorteilhafter ist. Ansonsten ergäbe auch das Reflektionsprinzip von VanFraassen keinen Sinn[48]. Allerdings werden wir zwecks der Einfachheit (besonders in Abschnitt 2 von Kapitel 4) nur von Standardkonditionierungen sprechen, was keinen zu großen Unterschied macht, weil sich das nach der Vorschrift von Jeffrey konditionierte Wahrscheinlichkeitsmaß beliebig nahe an dem standardkonditionierten Wahrscheinlichkeitsmaß befindet, falls das entsprechende Gewicht in der Konvexkombination groß genug ist[49].
Das Lotterieparadox wird oft eingeführt, um zu zeigen, dass Wahrscheinlichkeiten zu Glauben eine viel problematischere Beziehung als Belief-Sets aufweisen; aber fragen wir uns doch, wie eine Modellierung mittels ihnen aussehen würde. Formal betrachtet induzieren die Forderungen nach Konsistenz und deduktiver Abgeschlossenheit eine Filterstruktur in dem Sinne, dass es eine atomare Proposition gibt und alle weiteren Propositionen des Belief-Sets durch die Hinzunahme von beliebigen möglichen Welten entstehen. Damit ist die kodierte Information eines Belief-Sets die Auszeichnung einer Proposition. Dies kann aber insofern auch durch ein Wahrscheinlichkeitsmaß dargestellt werden, als dass alle möglichen Welten, die dieser Proposition angehören, die gleiche Wahrscheinlichkeit erhalten, wobei dieser Wert größer als die Wahrscheinlichkeiten der restlichen möglichen Welten ist. Das heißt, man sollte Glauben von Glaubensgraden nicht mittels einer absoluten Schwelle, sondern relativ ableiten: alle möglichen Welten, welche relativ die größte Wahrscheinlichkeit besitzen, bilden eine Proposition, die geglaubt wird; damit kann die Superstruktur der Belief-Sets emuliert werden (es wird die gleiche Information kodiert). Sinnvollerweise sollte man aber immer nur dann von dem Vorliegen eines Glaubens sprechen, wenn die Proposition eine echte Teilmenge des Ergebnisraumes ist, da ansonsten keine echte Information kodiert wird. Der gerade skizzierte Gedankengang lässt sich am einfachsten für eine aus zwei möglichen Welten A und $\overline{A}$ bestehende Partition verdeutlichen. In der Rangtheorie wird im Gegensatz zur Wahrscheinlichkeitstheorie der Rang von A nicht eindeutig durch den Rang des Komplementes bestimmt, jedoch ergibt sich unmittelbar aus der Minimumseigenschaft, dass entweder A oder ihr Komplement den Rang null haben muss. Falls nur eine mögliche Welt den Rang null hat, so expliziert das die Intuition, dass von zwei komplementären Propositionen eine geglaubt wird. Wenn man nun eine Erfassung mittels Wahrscheinlichkeiten herstellen möchte, kann man das so kodieren, dass eine mögliche Welt eine Wahrscheinlichkeit größer als 1/2 zugewiesen bekommt. Falls beide möglichen Welten simultan den Rang null erhalten, drückt dies eine Indifferenz aus. Gerade hier wird besonders deutlich, dass dies der klassischen Wahrscheinlichkeitszuweisung $P(A) = P(\overline{A}) = 1/2$ im Sinne des Indifferenzprinzips entsprechen kann.

Insofern wir gesehen haben, dass sich der Informationsgehalt von Belief-Sets aus

[48]Das Prinzip hat ja die Form $C_{t_1}(A|C_{t_2}(A) = x) = x$, wobei t_1 und t_2 zwei Zeitpunkte mit $t_1 < t_2$ bezeichnen. Man kann aber nur über $\{C_{t_2}(A) = x\}$ Bescheid wissen, wenn $t_1 = t_2$ ist.

[49]Diese Behauptung ist bezüglich einer beliebigen Metrik auf Wahrscheinlichkeitsmaßen zu verstehen; sogar bezüglich der feinen „Totalvariationsmetrik".

möglichen Welten auf die Auszeichnung einer Proposition beschränkt und auch eine probabilistische Modellierung mit einer reversiblen Dynamik aufwarten kann, leistet die Rangtheorie abgesehen von der Verallgemeinerung der AGM-Theorie keine fundamental neuen epistemologischen Beiträge, welche nicht mit den Mitteln der Wahrscheinlichkeitstheorie zugänglich wären. Jedoch ist zu bemerken, dass Rangfunktionen bezüglich der Darstellung des Glaubens einen alternativen gut ausgearbeiteten Ansatz konstituieren, was uns dazu veranlasst, weitere Vergleiche anzustellen, um beurteilen zu können, inwiefern die Rangtheorie die Rolle der Wahrscheinlichkeitstheorie in ihren Hauptanwendungsgebieten, Entscheidungstheorie und Statistik im Sinne von Prognosen relativer Häufigkeiten, übernehmen könnte[50].
Es ist bekannt, dass Wahrscheinlichkeiten und Entscheidungstheorie durch die Maximierung des probabilistisch gewichteten Nutzens beinahe unzertrennlich miteinander verwoben sind[51]. Welchen Beitrag können Ränge diesbezüglich leisten oder besser gefragt: Wie sieht ihre Alternative aus? Der entscheidende Punkt ist, ob es für Ränge ein Konzept der Integration zu einer Art Erwartungswertbildung gibt, damit diese eine entscheidungstheoretische Interpretation beanspruchen können. Seit den späten Achtzigern gab es erstmals Versuche, Entscheidungstheorie mit Hilfe von nichtprobabilistischen oder nichtadditiven Darstellungen von Glaubensgraden im formalen Rahmen der „Choquet Integration" zu formulieren[52]; es existiert sogar ein speziell auf die Rangtheorie zugeschnittener Ansatz von Giang und Shenoy [76], welcher auf der von Luce und Raiffa gegebenen axiomatischen Formulierung des Nutzens [148] aufbaut. Allerdings muss festgestellt werden, dass, obwohl es sich hier um vielversprechende Ansätze handelt, sie weit hinter der detailreichen Ausarbeitung der Standardentscheidungstheorie zurückbleiben.
Wie wir gesehen haben, konkurrieren Ränge durchaus mit Wahrscheinlichkeiten, wenn es um das Thema Glauben geht; allerdings ist es interessant zu fragen, wie sich Ränge bezüglich der wichtigsten Alternativinterpretation von Wahrscheinlichkeiten, also relativen Häufigkeiten, präsentieren: Ist es möglich mit Rängen Statistik zu betreiben? Wir beobachten viel zu viele bedeutungsvolle relative Häufigkeiten, als dass wir sie einfach ignorieren könnten. Bezüglich Rängen als natürlichen Zahlen muss aber einfach festgestellt werden, dass sie sich nicht als relative Häufigkeiten interpretieren lassen und es ihnen deshalb auch verwehrt bleibt, als Grundlage von statistischen Überlegungen zu dienen[53].

Nach diesen beiden Vergleichen muss abschließend konstatiert werden, dass die Wahrscheinlichkeitstheorie im Gegensatz zur Rangtheorie enorm stark bezüglich ihrer Anwendungsmöglichkeiten, Statistik und Entscheidungstheorie, ist und sogar verschiedenartige Interpretationen erlaubt, die ihrerseits einen hohen epistemologi-

[50] Hierzu greifen wir Spohns Selbstbeurteilung aus [219] auf.

[51] Auf diese Beziehung gehen wir in Unterabschnitt 1.1 von Kapitel 5 detaillierter ein.

[52] Einige dieser Versuche finden sich bei Gilboa [81], Schmeidler [192], Jaffray [111], Sarin und Wakker [189], Dubois und Prade [54], Brafman und Tennenholtz [27], Giang und Shenoy [77] sowie Wakker [246].

[53] Der Umstand, dass man stattdessen auch beliebige Ordinalzahlen betrachten könnte, ändert hieran nichts.

schen Gehalt haben. Dementsprechend kann man gerechtfertigt behaupten, dass die Rangtheorie (noch) keinen ernsthaften Konkurrenten für die Wahrscheinlichkeitstheorie darstellt.

3.2 Zwei analytische Resultate der Wahrscheinlichkeitstheorie

3.2.1 Der Satz von Bernoulli

Eines der wichtigsten und bekanntesten Standardresultate der Wahrscheinlichkeitstheorie nach der Kolmogorov-Axiomatisierung stellt das „Gesetz der großen Zahlen" dar. Diese Erkenntnis, welche rein analytischer Natur ist, besagt, dass das arithmetische Mittel der Realisierungen von unabhängig identisch verteilten Zufallsvariablen[54], die man oft als Wiederholungen eines Zufallsexperimentes vom selben Typ interpretieren möchte, mit hoher Wahrscheinlichkeit gegen den Erwartungswert einer solchen Zufallsvariablen konvergiert[55]. Der Spezialfall, dass es sich bei den Zufallsvariablen um Indikatorfunktionen für ein Ereignis handelt, ist von besonderem Interesse und unter dem Namen „Satz von Bernoulli" bekannt[56]. Der Satz kann mathematisch rigoros bewiesen werden. Aber welche Relevanz für Sachverhalte in der realen Welt entspringt diesem Resultat? Da der Erwartungswert einer Indikatorvariablen genau der Wahrscheinlichkeit des für die Indikatorfunktion gewählten Ereignisses entspricht, wird das oft so gedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit die Frequenz des Auftretens festlegt.
Zuerst schadet es nicht, zu erwähnen, was das Vorbild für diese wahrscheinlichkeitstheoretische Modellierung war. Laplace bemerkte in seinem „Philosophischen Versuch über die Wahrscheinlichkeit"[133], dass das Verhältnis von geborenen Mädchen und Jungen in verschiedenen europäischen Großstädten über einen längeren Zeitraum annähernd konstant war. Was hierbei eine probabilistische Herangehensweise verlangte, war die Tatsache, dass mikroskopisch, das heißt in kleinen Zeiträumen bei Betrachtung weniger Geburten, die Volatilität des untersuchten Verhältnisses sehr groß war. Makroskopisch aber konnte man einen relativ eindeutigen Zahlenwert extrahieren[57]. Diese Situation findet man im Satz von Bernoulli wieder[58]: Die Mehrzahl aller denkbaren Realisierungen weist kein erkennbares Muster auf. Sie haben aber alle die gemeinsame Eigenschaft, dass sich die relativen Häufigkeiten, die

[54] Oft wird von der Unabhängigkeit von Ereignissen statt der von Zufallsvariablen gesprochen, was aber keinen großen Unterschied macht. Zwei Zufallsvariablen sind genau dann unabhängig, wenn alle ihre Ausprägungen, welche Ereignisse darstellen, unabhängig sind.

[55] In der gerade gegebenen Formulierung wurden absichtlich technische Details unterschlagen. Um präziser zu sein, ist zu erwähnen, dass es zwei Varianten gibt, nämlich das „schwache" und das „starke Gesetz der großen Zahlen". Der Unterschied besteht darin, dass entweder nur die „Konvergenz in Wahrscheinlichkeit" oder sogar die „fast sichere Konvergenz", welche stärker ist und erstere Konvergenzart impliziert, behauptet wird.

[56] Dieser erschien zum ersten Mal in seinem epochalen Werk „Ars Conjectandi"[14] (Die Kunst der Vermutung). Tatsächlich benötigte Jacob Bernoulli zwanzig Jahre seines Lebens, um diesen zu beweisen. Heutzutage verwendet der Standardbeweis die Maschinerie der „Erzeugenden Funktionen" und lässt sich in wenigen Zeilen abhandeln.

[57] Das Verhältnis von geborenen Jungen zu Mädchen betrug grob 51 : 49.

[58] Gerade hier bietet es sich an, die Spezialisierung der Zufallsvariablen auf eine Indikatorfunktion zu verwenden, da man es hier mit komplementären Ereignissen zu tun hat und das Ausbleiben der Geburt eines Jungen der Geburt eines Mädchens entspricht.

sie beschreiben, annähernd gleichen.
Dass der Satz von Bernoulli bei der Beschreibung derartiger Phänomene einigen Erfolg beanspruchen kann, steht außer Zweifel[59], jedoch resultiert dies oft darin, dass ihm ein „synthetischer" Gehalt zugesprochen wird, was sich an immer wieder zu hörenden Behauptungen wie „Der Satz von Bernoulli beweise, dass sich die zukünftige Frequenz von der beobachteten relativen Häufigkeit nur minimal unterscheide." zeigt. Es ist aber zu bemerken, dass hierbei schon die fundamentale Präsupposition, dass sowohl in der Vergangenheit als auch in der Zukunft unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen vorliegen, eingeht. Dies kodiert an sich schon eine Annahme in die Uniformität der Welt, weshalb die davon abgeleitete Folgerung nur wenig überraschen sollte. Unter dieser Annahme zeigt der Satz von Bernoulli im Wesentlichen zwei Dinge: erstens, dass sich unter den genannten Rahmenbedingungen die meisten Frequenzen des Produktraumes um einen bestimmten Wert konzentrieren, und zweitens, dass dieser mit der Erfolgswahrscheinlichkeit der dichotomen Zufallsvariablen, welche den gesamten Produktraum aufspannt, identisch ist. Deshalb liegt der Verdienst dieses analytischen Resultates darin, zu verdeutlichen, wie sich die Struktur des so konstruierten Wahrscheinlichkeitsraumes in Frequenzen von Ereignistupeln niederschlägt. Aber wie bereits erwähnt wurde, steht und fällt der Satz (qua Folgerung) mit seiner Prämisse, also der Annahme, welche eine gewisse Gleichförmigkeit ausdrückt. Wie DeFinetti in [44] zeigte, muss sich diese nicht unbedingt mittels unabhängig identisch verteilter Zufallsvariablen gestalten, um auf das gewünschte Ergebnis folgern zu können, sondern kann allgemeiner mit „austauschbaren" Zufallsvariablen erreicht werden[60]. Noch allgemeiner kann man das Gesetz der großen Zahlen für „stationäre" Zufallsvariablen beweisen, welche die vorigen Bedingungen als Spezialfälle enthalten[61]: Eine Folge von Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots$ heißt stationär, wenn für alle n-Tupel ihrer Realisierungen und natürlichen Zahlen m

$$P(\{X_{i_1} = x_1\} \cap \dots \cap \{X_{i_n} = x_n\}) = P(\{X_{i_1+m} = x_1\} \cap \dots \cap \{X_{i_n+m} = x_n\})$$

gilt. Nachdem wir uns klar gemacht haben, was die Grundlage des Satzes von Bernoulli wirklich darstellt, wollen wir nun versuchen, Aussagen über statistische Phänomene richtig zu verstehen.

Die Aussagekraft des Satzes von Bernoulli wird im Alltag oft etwas überstrapaziert, wenn man etwa behauptet, er zeige, dass sich beim Sport oder Spielen auf lange Sicht die „bessere" Person durchsetzen werde. Diese Behauptung ist jedoch etwas differenzierter zu verstehen[62]. Mit dem „besseren" Sportler wird vornehmlich die Person gemeint, welche die höhere Erfolgswahrscheinlichkeit hat. Bei dieser

[59] Die mathematische Konvergenz ist hierbei finitistisch in dem Sinne zu deuten, dass eine Erhöhung der Anzahl der endlichen Beobachtungen die Präzision verbessert, also die Schwankungen immer kleiner werden lässt.

[60] Im folgenden Unterabschnitt werden wir speziell auf diesen Umstand etwas genauer eingehen.

[61] Etwa in [114].

[62] Bei dem streng mathematischen Resultat geht es ja um eine Konvergenz. Für endlich viele Beobachtungen werden nur hohe Wahrscheinlichkeiten vergeben.

Bewertung a priori fließt ein, welche Fähigkeiten des Sportlers relevant sind, wie gut er sie beherrscht und in welchem Maße sie zum Einsatz kommen. Hat man diese initiale Einschätzung getroffen, so garantiert der Satz allein keinesfalls, dass die Person, die bezüglich dieser Evaluierung am besten abschneidet, auch tatsächlich am meisten Erfolg haben wird. Er sagt vielmehr genauer, dass sich im Falle einer korrekten Bewertung die Erfolgsfrequenz des Sportlers mit hoher Wahrscheinlichkeit nahe des numerischen Wertes der Erfolgswahrscheinlichkeit bewegt, *wenn* die anfängliche Situationsbeurteilung für jeden einzelnen erneuten Versuch „gültig" ist. Damit ist der a priori „bessere" Sportler nur dann mit hoher Wahrscheinlichkeit auch tatsächlich, a posteriori, der erfolgreichere, wenn eine gewisse Gleichförmigkeit gültig ist. Es ist aber unmittelbar klar, dass dies nur eine Näherung darstellen kann, zumal Menschen kontinuierlich dazulernen und während der wiederholten Versuche verschiedenartige sequentielle Effekte, unter anderem psychologischer Natur, ausgelöst werden können.
In dem Wissen, dass sich eine sorgfältige Beurteilung a priori schwierig gestalten kann, möchte man oft mit Hilfe des Satzes von beobachteten Frequenzen auf weitere relative Häufigkeiten folgern. Hier wird dann der Weg gewählt, dass man die beobachteten Frequenzen für eine Schätzung der Erfolgswahrscheinlichkeit einer typischen Einzelsituation heranzieht und dann wie oben beschrieben verfährt. Damit dies funktioniert, muss die Uniformität, welche sich in der Zukunft zeigen soll, aber schon für die vergangenen Ereignisse gültig gewesen sein.
Das heißt, dass die Folgerungen, die man aus dem Satz von Bernoulli für die reale Welt zieht, beinahe an Trivialität grenzen: Wenn eine gewisse Gleichförmigkeit gilt, wird die zu beobachtende Frequenz mit großer Wahrscheinlichkeit mit der bereits bekannten relativen Häufigkeit übereinstimmen. Der Verdienst des Satzes liegt vielmehr darin, zu zeigen, dass sich dieses aufgrund von Erfahrungen intuitive Räsonieren unter anderem im Rahmen von unabhängig identisch verteilten Zufallsvariablen mathematisch nachmodellieren beziehungsweise präzisieren lässt; damit kann man sich darüber klarer werden, in welchem Umfang man vernünftigerweise mit Ausnahmen rechnen sollte.

Damit ziehen wir das Fazit, dass immer, wenn dem Satz ein „synthetischer Gehalt" zugestanden wird, man die fundamentale Annahme der Gültigkeit einer Uniformität der Welt als nicht diskussionswürdig oder gegeben erachtet, aber genau diese Präsupposition kritisch ist und die eigentliche Grundlage für die intendierte Art der Voraussage bildet.

3.2.2 Das Repräsentationstheorem von DeFinetti

Wie wir gesehen haben, stellt der Satz von Bernoulli unter der Annahme von unabhängig identisch verteilten Ereignissen eine ausgereifte Modellierung einer weit verbreiteten Intuition dar. Doch DeFinetti wollte sich nicht damit begnügen, dass man nur bei Unabhängigkeit die zukünftige relative Häufigkeit durch die bereits be-

obachtete Frequenz evaluieren darf. Hierzu muss bemerkt werden, dass er, wie Hintikka [99] und Braithwaite [28] korrekt feststellen, eigentlich keine Probleme damit gehabt hätte, die Unabhängigkeit von zwei (und damit auch endlich vielen) Ereignissen E_1 und E_2 mittels der bekannten Gleichung $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$ zu definieren[63], wenn man die Wahrscheinlichkeiten als Wettraten deutet. Er verzichtet aber laut Stegmüller [221] bewusst darauf, dies zu tun, da es seiner Meinung nach zu sehr einer objektiven Interpretation des Wahrscheinlichkeitsbegriffes in die Hände spielt. Dies liegt erstens daran, dass Wahrscheinlichkeiten aus epistemischer Sicht als Beschreibung von Lernprozessen eine wesentliche Funktion erfüllen, und zweitens, wie aus seinem Werk „Probabilismo"[45] hervorgeht, das Konzept der Unabhängigkeit vor dem Hintergrund eines omnipräsenten Kausalnexus einfach zu vage ist, um als Fundament für seine subjektivistische Theorie dienen zu können. Er wollte also ein analoges Resultat für Wahrscheinlichkeitsverteilungen, welche ein Lernen durch Erfahrung in dem Sinne zulassen, dass eine Konditionierung die Wahrscheinlichkeit nicht unverändert lässt[64]. Damit wäre seiner Meinung nach endgültig gezeigt, dass sich die subjektivistische Auffassung als besseren Startpunkt für die Wahrscheinlichkeitstheorie erweise.
Sein Ziel sollte er mit dem Konzept der „Austauschbarkeit" von Zufallsvariablen[65] erreichen, welches einen wichtigen Baustein des Subjektivismus darstellt. Formal ist eine Menge von Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ austauschbar, wenn die Wahrscheinlichkeit der Ausprägungen einer Teilmenge dieser Zufallsvariablen nicht von der Reihenfolge abhängt:

$$P(\{X_1 = x_1\} \cap \cdots \cap \{X_k = x_k\}) = P(\{X_{\sigma(1)} = x_1\} \cap \cdots \cap \{X_{\sigma(k)} = x_k\}).$$ [66]

Diese Bedingung, welche gewisse Abhängigkeiten erlaubt[67], abstrahiert laut DeFinetti viel besser die Intuition, die hinter der Unabhängigkeitsannahme steckt. Essentiell ist nun, dass DeFinetti sogar die Gültigkeit des Gesetzes der großen Zahlen für austauschbare Zufallsvariablen zeigen konnte, was demonstriere, dass auch die subjektivistische Theorie das Problem der Induktion „vollständig löse" ([44]). Vor dem Beweis des Satzes unter der abgeschwächten Annahme wurde der Subjektivismus lediglich als Kuriosität betrachtet, da bei mehrfacher Wiederholung für Verteilungen mit Abhängigkeiten nicht der Brückenschlag zu üblichen statistischen Vorgehensweisen vollzogen werden konnte. Die Bedeutung dieses Resultats haben wir schon oben diskutiert; was uns nun interessiert, sind die Interpretationen, die sein berühmtes Repräsentationstheorem erfährt, welches zeigt, dass symmetrische Verteilungen ge-

[63] Auf diese Weise wird Unabhängigkeit formal in der Wahrscheinlichkeitstheorie definiert.

[64] Im Gegensatz zu der Bernoulliverteilung, welche oft als Lösung des „Problems vom Irrtum des Spielers" herangezogen wird. Auf dieses gehen wir in Kapitel 6 Unterabschnitt 1.2 ein.

[65] Auch die Bezeichnung „Vertauschbarkeit" ist üblich. Diese beiden gängigen Bezeichnungen stellen einen Fortschritt gegenüber den von DeFinetti und Savage ursprünglich verwendeten Namen „Symmetrie" und „Äquivalenz" dar, da diese einfach zu unspezifisch sind. Allerdings werden Wahrscheinlichkeitsverteilungen, welche diese Eigenschaft zulassen, streng genommen als symmetrisch bezeichnet, da man sich sonst fragen müsste, womit diese denn vertauschbar wären.

[66] Hierbei sei σ eine Permutation auf den Zahlen $1, \ldots, k$ mit $k \leq n$.

[67] Natürlich ist die Unabhängigkeit als Spezialfall enthalten.

nau Konvexkombinationen von Bernoulliverteilungen entsprechen.
Laut Standardinterpretation, welche dieses Resultat erfährt[68], hat DeFinetti gezeigt, wie man objektive Wahrscheinlichkeiten in subjektive Wahrscheinlichkeiten „verwandeln" und damit eliminieren könne: Glaubensgrade (also subjektive Wahrscheinlichkeiten) bezüglich statistischer Gesetze, die durch eine Abfolge von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen beschrieben werden, sind äquivalent zu symmetrischen subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaßen[69]. Im Folgenden soll nun dargelegt werden, warum diese Deutung nicht stimmig ist und welche Irrtümer sie herbeiführt.

Bezüglich des Charakters der Wahrscheinlichkeiten wird ausgesagt, dass „die Multiplikation von subjektiven mit objektiven Wahrscheinlichkeiten letztendlich wieder ein Glaubensgrad sei". Die zugrunde liegende Idee wird eigentlich viel besser von dem Principal Principle von Lewis artikuliert, welches einem nahelegt, die Werte objektiver Wahrscheinlichkeiten für subjektive zu verwenden. Es ist verwunderlich, wie ein rein analytisches Resultat die Natur der Wahrscheinlichkeiten verändern können soll. Zudem gibt es bei dem Prinzip von Lewis eine ausgezeichnete Richtung; bei dem Repräsentationstheorem handelt es sich dagegen um eine Gleichung, was bedeutet, dass man beide Richtungen beschreiten kann. Demnach sollte auch jedem Glauben ein objektiver Gehalt korrespondieren, was aber in einigen Fällen völlig abwegig ist: Eine beobachtete Frequenz kann sehr wohl Anlass für eine bestimmte Meinung sein, es ist allerdings zu bezweifeln, dass ein Glauben eine relative Häufigkeit schon eindeutig festlegt. Der Umstand, dass die Objektivität in der Gleichung nur an einer Stelle auftritt, scheint nicht ganz konsistent zu sein.
Hintikka [99] behauptet sogar, dass das Repräsentationstheorem tatsächlich im Sinne der dargelegten Betrachtungsweise zeige, dass man auf die Richtigkeit von Naturgesetzen wetten könne: Auf alle Ereignisse, die mittels einer subjektiven Wahrscheinlichkeit erfassbar sind, könne gewettet werden; da ja das Theorem subjektive in objektive Wahrscheinlichkeiten verwandele, sei es eben auch für statistische Gesetze möglich. Diese Deutung geht dann aber auch Stegmüller berechtigterweise zu weit, da Naturgesetze niemals endgültig verifizierbar sind und damit Wetten ihren eigentlichen Sinn verlieren[70]. Wie Stegmüller richtig bemerkt, ist dieser Einwand

[68] Eine Erwähnung dieser in einem neueren Aufsatz findet sich zum Beispiel in [219].

[69] Stegmüller spricht in [221] von *Hypothesenwahrscheinlichkeiten* für statistische Wahrscheinlichkeiten. Diese Hypothesenwahrscheinlichkeiten sind üblicherweise wiederum als Glaubensgrade zu verstehen, was von Savage in [191] klar herausgestellt wird. Für Stegmüller gehören diese aber zum Instrumentarium des Objektivismus. Wir entscheiden uns hier nicht nur für die Interpretation der Gewichtung als Glaubensgrade, weil diese Deutung unter Bayesianisten weiter verbreitet ist, sondern da sich unsere Kritikpunkte bei Stegmüllers Deutung sogar noch verstärkten.

[70] Hierzu ist zu bemerken, dass seine Argumentation genau genommen unzulässig ist, denn er möchte die Sinnlosigkeit des Unterfangens dadurch illustrieren, dass der Einsatz für eine nicht entscheidbare Wette in jedem Fall verloren sei und es demnach einer Aufforderung zur Geldverschwendung gleich käme. Dies greift aber zu kurz, da man ja zu der Übereinkunft kommen kann, dass Geldzahlungen, egal in welche Richtung, nur bei einer Entscheidung der Wette stattfinden; das wird uns noch beim „Zins-Einwand" gegen das Dutch-Book-Argument im nächsten Kapitel in Unterabschnitt 1.3 begegnen. Die eigentliche Sinnlosigkeit liegt somit darin, dass die Wette keinerlei monetäre Konsequenzen hat und in diesem Sinne überflüssig ist.

keinesfalls mit DeFinettis inbrünstig vertretenem Positivismus gleichzusetzen, da im entscheidungstheoretischen Fall das Tarski-Analogon[71] zum Begriff der Wahrheit fehlt.

Aber wie ist eine mathematische Gleichung sinnvoll zu interpretieren? Grundsätzlich bietet sich die Situation so dar: Ein Abstraktum, welches möglicherweise durch einen Abstraktionsprozess von einem physikalischen Objekt geschaffen wurde, wird durch eine Zahl beschrieben. Natürlich lässt sich dann die Zahl mittels Umformungen auf verschiedene Arten präsentieren, doch müssen diese nicht immer sinnvoll auf das Abstraktum übertragbar sein, wenn es einem physikalischen Objekt entstammt: Nur weil sich die Eins, welche die Menge einer Sorte bezeichnet, unterschiedlich als Summe zerlegen lässt, ist noch lange nicht klar, wie man zum Beispiel die Zerlegung $1 = 1/2 + 1/2$ annähernd interpretieren soll, wenn das Ding keine Symmetrie aufweist. Aber auch bei Abstrakta, denen keine physikalische Entität zugrunde liegt, ist es nicht sofort klar. Denn wie soll man etwa eine halbe Möglichkeit auffassen? Damit ist festzustellen, dass nicht alle dieser alternativen Darstellungen einen Zweck erfüllen. In dem Fall, dass alle Wahrscheinlichkeiten im Darstellungstheorem durchgängig die gleiche Interpretation erhalten, ist es aber möglich, Summen und Produkten eine sinnvolle Deutung zu geben[72]. Die Addition kann einfach als Hinzunahme von Glaubensstärke beziehungsweise, nach Bilden des Hauptnenners[73], von Manifestationen oder Möglichkeiten aufgefasst werden. Die Multiplikation lässt sich so deuten: Bei Glaubensgraden beschreibt sie, welchen Glaubensgrad man bezüglich eines Teilereignisses hat, während sie im logischen und frequentistischen Fall wiederum nach Bilden des Hauptnenners angibt, wie sich Manifestationen oder Möglichkeiten für Teilereignisse gestalten. Somit möchten wir uns für eine durchgängige „ontologische" Interpretation der Abstrakta in den verschiedenen Darstellungen aussprechen. Dies ist weitaus plausibler als die Alternative, denn nur, weil zwei verschiedene Dinge durch die gleiche Zahl beschrieben werden, müssen diese nicht ineinander überführbar sein. Das aber wäre genau das, was passierte, wenn man behauptete, das Darstellungstheorem zeige, wie man Wahrscheinlichkeiten einer bestimmten Art in solche einer anderen „verwandeln" könne[74]. Dies gilt ebenso wenig, wie die Gleichung $5 = 5$ Äpfel zu Birnen macht und umgekehrt. Gerade auf die Problematik des Repräsentationstheorems scheint eine Wendung von Gertrude Stein zu passen: „A rose is a rose is a rose.". Sie ist in dem Sinne zu verstehen, dass ein Identitätsprinzip behauptet wird.

Doch woher kam eigentlich DeFinettis ursprüngliche Motivation für das Darstel-

[71] Bezüglich der Diskussion über die Verifikationstheorie der Satzbedeutung zeigte Tarski. wie man, auch wenn eine Verifikation ausgeschlossen ist, sinnvoll von wahren Aussagen sprechen kann.

[72] Es werden explizit Summen und Produkte genannt, denn was sollte etwa die Gleichung $0,75 = 4 - 3,25$ bezüglich Wahrscheinlichkeiten bedeuten?

[73] Wahrscheinlichkeiten in der frequentistischen und logischen Deutung können vernünftigerweise nur rationale Zahlen annehmen.

[74] Wenn man die Anschauung, dass die Multiplikation von objektiven mit subjektiven Wahrscheinlichkeiten wiederum zu subjektiven Wahrscheinlichkeiten führt, ernst nimmt, sollte auch die Division von subjektiven Wahrscheinlichkeiten zu objektiven führen. Aber was passiert dann bei bedingten Wahrscheinlichkeiten im Bayesianismus, die ja auch wieder Glaubensgrade sind?

lungstheorem? Es wurde bereits erwähnt, dass er sich besonders für Wahrscheinlichkeitsverteilungen interessierte, welche ein Lernen aus Erfahrung mittels eines nichttrivialen Einflusses von Konditionierungen zulassen, und symmetrische Wahrscheinlichkeitsmaße schienen für ihn geeignet zu sein. Aufgrund der Möglichkeit zur formalen Darstellung von solchen als Konvexkombinationen von Bernoulliverteilungen konnte er dies besser motivieren. In [44] erläutert er, dass sich ein symmetrisches Wahrscheinlichkeitsmaß etwa ergibt, wenn man eine Urne mit unbekanntem Inhalt beschreiben möchte, was für ihn ein wohlverstandenes Problem ist. Dieses erfordere nicht unbedingt, sein neues Konzept zu verwenden, was aber völlig anders sei, wenn man eine Münze mit inhomogener Masseverteilung betrachte. Während man bei der Urne problemlos von hypothetischen Füllungen und darauf bezogenen Wahrscheinlichkeiten sprechen könne, ergebe dies bei einer gezinkten Münze einfach keinen Sinn, weshalb man heimlich analog rechnen sollte, aber letztendlich nur von dem symmetrischen Wahrscheinlichkeitsmaß reden sollte. Als Vorteil ergebe sich somit, dass man über solche „dubiosen" Wahrscheinlichkeiten der Münze kein Wort mehr verlieren müsse. Worin unterscheiden sich aber die beiden beschriebenen Szenarien genau? Letztendlich kann es nur wieder eine Kritik an dem objektivistischen Begriff der „unbekannten Wahrscheinlichkeit" sein, welche sich als Grenzwert der relativen Häufigkeit ergibt. Während man bei der Urne durch einen enthüllenden Blick die Wahrscheinlichkeit unmittelbar zuschreiben kann, ist dies bei der gezinkten Münze eigentlich nur nach unendlich vielen Wiederholungen möglich. Die Frage ist aber, ob dieser stipulierte Unterschied wirklich so besteht. In dem Beispiel kann man der Münze genau wie der Urne aufgrund von physikalischen Gegebenheiten eine Wahrscheinlichkeit zuweisen. Natürlich ist ein Blick in die Urne leichter zu vollziehen als eine Bestimmung der Masseverteilung der Münze mittels technischer Gerätschaften. Aber prinzipiell gibt es keinen Unterschied[75]. Diese Symmetrie kann noch weiter verdeutlicht werden: Es könnte hingegen sogar sein, dass die Kugeln der Urne trotz gleicher Form deutlich unterschiedliche Massen besitzen, was dazu führt, dass sie bei Ziehungen nicht nur erkannt werden, sondern auch bei einem Schütteln der Urne bestimmte bevorzugte Positionen einnehmen, welche das Ziehverfahren verzerren.

Zusammenfassend können wir damit feststellen, dass das Repräsentationstheorem von DeFinetti außerhalb seiner analytischen Dimension nicht nur obskure Deutungen erfährt, sondern auch ursprünglich nicht überzeugend motiviert wurde. Grundsätzlich sollte man sich an eine durchgängige Interpretation von analytischen Gleichungen halten und sich bei der Übernahme von numerischen Werten auf das Principal Principle von Lewis beziehen, bevor man unplausible Beziehungen zwischen subjektiven und objektiven Wahrscheinlichkeiten behauptet. Wie auch Stegmüller abschließend korrekt feststellt, trägt das Repräsentationstheorem nichts zu der Diskussion bei, ob der Objektivismus oder der Subjektivismus eine angemessenere Wahrscheinlichkeitsinterpretation liefere. Es half nur dabei, anfängliche Zweifel bezüglich der

[75] Man hätte das Beispiel auch genau andersherum aufziehen können: Einerseits bestimmt man die Masseverteilung der Münze, andererseits legt man die Wahrscheinlichkeit der Urne unabhängig vom Inhalt durch einen Grenzwert fest.

Leistungsfähigkeit des Subjektivismus auszuräumen, welche sich dadurch ergaben, dass der Schwerpunkt auf Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die ein Lernen aus Erfahrung zulassen, liegt und deshalb ein Resultat im Sinne des Satzes von Bernoulli nicht herleitbar erschien.
Schließlich motiviert unsere Diskussion bezüglich der Interpretation von analytischen Gleichungen das folgende Prinzip zu postulieren:

Reinheitsprinzip
Eine mathematische Beschreibung von Abstrakta[76] ist genau dann sinnvoll, wenn (a) alle vorkommenden Abstrakta den gleichen Charakter haben[77] und (b) eine den Abstrakta entsprechende Umformung gewählt wurde.

Die Implikation nach (a) und (b) wurde durch obige Beispiele verdeutlicht (da man natürlicherweise eine einheitliche Interpretation für Zahlen anstrebt, werden bei bestehenden Unterschieden manche Abstrakta falsch behandelt); die andere Richtung ergibt sich aus dem Umstand, dass in (a) und (b) alle relevanten Aspekte einer mathematischen Beschreibung genannt werden. Da die verwendete Abbildung die Typen gemeinsam umformt, versteht es sich von selbst, dass dann auch die Zahlen im Wertebereich eine einheitliche Interpretation genießen.

[76] Hiermit ist gemeint, dass Abstrakta auf rationale oder reelle Zahlen abgebildet werden, welche man dann Umformungen unterwirft. Selbstverständlich werden konkrete Dinge nie direkt erfasst, sondern abstrakte Vorstellungen, die man von ihnen hat.

[77] Das soll in dem Sinne gelten, dass sie Instanzen eines gemeinsamen Typs sind.

Kapitel 4

Bayesianismus

4.1 Das Dutch-Book-Argument

Die Etablierung der Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung mittels Wettquotienten stellt prima facie nicht nur eine völlig andersartige Rechtfertigung als mittels logischer Möglichkeiten oder Frequenzen dar, sondern hat auch einen originellen Charakter. Die Frage ist aber, welche impliziten Annahmen bei dieser Herleitung stillschweigend eingehen und inwiefern sie problematisch sind. Insbesondere muss im Falle des Vorliegens derartiger Einschränkungen geklärt werden, ob man die gleichen Folgerungen des Dutch-Book-Arguments auch noch bei der Nichterfüllung der Annahmen ableiten kann. Gerade da es sich um eine so andersartige Begründung eines wichtigen epistemologischen Rationalitätsprinzips handelt, muss man bei der Untersuchung der Validität besondere Sorgfalt walten lassen. Zur Klarstellung sei noch erwähnt, dass in der Literatur zwischen der Konstitution eines Dutch Books, dem Dutch-Book-Theorem und dem Dutch-Book-Argument unterschieden wird. Ersteres meint einfach ein Wettangebot, das bei Annahme in jedem Fall einen Verlust garantiert. Das Theorem bezeichnet die rein mathematische Aussage über die Möglichkeit solcher Wettangebote und wird, insofern es sich um eine analytische Wahrheit handelt, nicht ernsthaft kritisiert. Letztendlich ist das Dutch-Book-Argument, was uns nun interessiert, nämlich ob man von dem Theorem und dem Wettszenario auf eine Norm für ein epistemisches Subjekt folgern sollte.

4.1.1 Glaubensgrade

Bacchus, Kyburg und Thalos [6] stellen eine sehr fundamentale Frage bezüglich der Gültigkeit des Dutch-Book-Arguments als Beschränkung für Glaubensgrade: Wieso sollten sie als reelle Zahlen im abgeschlossenen Intervall von null bis eins erfassbar sein, wenn sie überhaupt existieren? Wie wir gesehen haben, ergibt sich die Skala von null bis eins direkt, wenn man Glaubensgrade operationalistisch über Wettquotienten zuweist; jedoch muss geklärt werden, ob diese auch ohne die Rahmenbedingungen von Wetten natürlich ist.

Es steht wohl außer Zweifel, dass Menschen unterschiedliche Arten des Glaubens in verschiedene Sachverhalte haben können, welche auf komplexe Weise charakterisierbar sind. Insofern ist die eigentliche Frage, warum es sinnvollerweise reichen sollte, diese mittels der Lokalisierung eines Grades in $[0, 1]$ zu beschreiben, also warum es sich hier insbesondere um eindimensionale Größen handelt. Der Grund dafür liegt darin, dass Glauben seit Menschengedenken schon immer die Basis für Handlungen konstituierte. Falls man vor eine Wahl disjunkter Alternativen gestellt wird und nur eine zum Erreichen des Zieles führt, muss man die Option wählen, von der man sich am meisten verspricht. Die eindimensionale Struktur garantiert, dass unter Vermeidung von zyklischen Anordnungen[1] alle Glaubensgrade miteinander vergleichbar sind[2] und ein eindeutiger maximaler Wert ausgezeichnet werden kann[3]. Das soll nicht heißen, dass jeder Glauben zu einer Handlung führen muss, sondern nur, dass er in einer solchen resultieren könnte. Wie Ramsey in „Truth and Probability" [180] korrekt bemerkt, ist der Einwand, warum Russell in „Analysis of Mind" [185] die Deutung von Glaubensgraden im Sinne von Handlungsgrundlagen verwirft, nämlich dass sie nicht immer in einer Handlung resultieren, unberechtigt. Da Glaubensgrade auch als Entscheidungsgrundlage genutzt werden, können wir dadurch Rückschlüsse auf ihre Struktur ziehen.

Nun muss man allerdings erläutern, warum man sich nicht mit einer bloßen Reihenfolge zufrieden geben und eine intervallskalierte Abstufung, wie sie von rationalen beziehungsweise reellen Zahlen geliefert wird, bevorzugen sollte. Hierauf sei erwidert, dass sie viele wünschenswerte Vorteile mit sich bringt: Erstens bleibt die ordinale Struktur als Spezialfall enthalten, zweitens erlaubt sie eine bessere Kodierung von Situationsverständnis und drittens wird eine Verträglichkeit mit anderen Wahrscheinlichkeitsinterpretationen sichergestellt, was insbesondere bei den bayesianischen Expertenprinzipien eine Rolle spielt. Insofern wir uns für ein endliches Szenario möglicher Welten ausgesprochen haben, reichen die rationalen Zahlen als Wertebereich für Glaubensgrade aus. Reelle Zahlen ergeben sich immer nur als Idealisierung von Sachverhalten und entstammen unserer generischen Sprechweise[4]. Möchte man die größte Allgemeinheit garantieren, so kann man auch reelle Zahlen als Glaubensgrade zulassen, aber reelle Zahlen können beliebig genau durch rationale approximiert werden.

Unter dem vornehmlichen Zweck als Handlungsgrundlage sieht man dann auch ein,

[1] Diese werden ausführlicher im nächsten Kapitel in Unterabschnitt 1.3 motiviert und erläutert. Aufgrund der organischen Struktur der Thematik ist es schwierig, alles in einer linearen Ordnung zu präsentieren.

[2] Dies ist natürlich eine normative Forderung, denn es ist durchaus denkbar und kommt immer wieder vor, dass man verschiedene Glaubensbewertungen kaum oder gar nicht miteinander vergleichen kann. Aber unsere Erfahrung lehrt uns, dass dies keine allzu übertriebene Forderung ist. Am deutlichsten wird dies im alltäglichen Leben, wo wir ständig mit gutem Gewissen eine eindeutige Option wählen.

[3] Sollten sich zwei Glaubensgrade exakt gleichen, so zeigt sich der Entscheider indifferent bezüglich der Optionen und ist mit einer beliebigen zufrieden

[4] Etwa bei geometrischen Betrachtungen, wo irrationale Zahlen aufgrund des Satzes von Pythagoras bei den Diagonalen von Quadraten ins Spiel kommen. Allerdings existieren in der aktuellen Welt keine idealen Punkte.

warum Intervalle von Glaubensgraden[5] nicht geeignet sind: Man kann sie nicht so einfach wie bloße Grade vergleichen. Bezüglich der Notwendigkeit von Intervallen statt „scharfen" Graden wird häufig argumentiert, dass es sehr schwierig sei, einen definitiven Grad zu finden. Man müsse deshalb mit einem Intervall vorliebnehmen. Aber selbst wenn dies der Fall wäre, kann man einem Intervall immerhin sinnvoll einen eindeutigen Grad assoziieren, indem man den Mittelpunkt nimmt, welcher die durch das Intervall gelieferte Information symmetrisch in sich vereint. Dies funktioniert natürlich nur bei einer zusammenhängenden Menge. Falls sich die Darstellung der Unwissenheit tatsächlich über mehrere zusammenhängende Teilintervalle erstreckt, so bietet es sich an, das arithmetische Mittel der entsprechenden Mittelpunkte zu wählen[6]. Somit sind scharfe Glaubensgrade nicht nur einfacher zu vergleichen, sondern können Intervallen auch kanonisch zugeordnet werden, was in umgekehrter Richtung nicht problemlos funktioniert.
Jetzt ist noch die Frage zu klären, weshalb sich diese lineare Ordnung gerade auf das spezielle Intervall $[0, 1]$ erstrecken sollte beziehungsweise warum es Grenzen für die Glaubensgrade mit den entsprechenden Bewertungen null und eins geben sollte. Die basale Feststellung ist, dass es für den Glaubensgehalt von Ereignissen zwei kanonische Grenzen gibt: einerseits Unmöglichkeit, andererseits logische Gültigkeit. Dies muss sich dann vernünftigerweise in der Bewertung widerspiegeln, indem logische Widersprüche das Minimum und Tautologien das Maximum aller denkbaren Glaubensgrade erhalten. Es versteht sich von selbst, dass die Glaubensgrade von kontingenten Sachverhalten zwischen diesen extremalen und damit in gewisser Weise trivialen Werten liegen müssen, was die Existenz der Schranken erklärt; es ergibt einfach keinen Sinn, von Ereignissen zu sprechen, die „unwahrscheinlicher als unmöglich" oder „wahrscheinlicher als sicher" sind. Aber warum sollten diese Grenzen durch null und eins repräsentiert werden, da die Festlegung der Schranken eigentlich willkürlich erscheint? Der Grund hierfür ist, dass die Null und die Eins Zahlen mit bestimmten Eigenschaften sind, welche im Rahmen der Wahrscheinlichkeitstheorie ausgenutzt werden. So ist etwa die Eins für eine konsistente Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit notwendig, damit eine Konditionierung auf die Gesamtmenge wieder die ursprüngliche Wahrscheinlichkeit liefert, wohingegen die Null zum Beispiel garantiert, dass sich bei Unabhängigkeit die Unmöglichkeit eines Ereignisses auf eine sie beinhaltende Konjunktion überträgt. Zudem lässt sich mit Hilfe dieser Schranken die klassische binäre Logik einbetten. Das hat etwa auch schon Carnap ausgenutzt.

4.1.2 Das Wettszenario

Nun steht die Angemessenheit des Wettszenarios zur Diskussion: Von dem Wettteilnehmer wird erwartet, dass er Wetten, welche ja aus Einsatz und Gewinn bestehen, nur nach dem zugehörigen Quotienten beurteilt und dass er sogar bereit ist, solche

[5] Diese wurden in Unterabschnitt 1.1 des dritten Kapitels dargestellt.
[6] Man beachte die Analogie zum Konzept des Schwerpunktes in der Physik.

Wetten „selbst zu verkaufen".
Warum aber sollte man Wetten nur nach einer Zahl beurteilen, obwohl man ja a priori zwei Freiheitsgrade (Einsatz und Gewinn) hat? Eine plausible Erklärung zur Elimination des Absolutbetrages wäre die folgende: Man spaltet ein aus Einsatz und Gewinn bestehendes Wettangebot in gleiche Teile auf, die ihrerseits identische Quotienten aufweisen. Wenn man eine dieser Elementarwetten als fair[7] einstuft, gibt es keinen Grund, nicht erneut eine solche Wette anzunehmen[8]. Umgekehrt gilt, dass, wenn die Gesamtwette fair war, schon die Elementarwetten fair gewesen sein müssen. Damit ergibt sich, dass als Charakterisierung von fairen Wettangeboten allein die Quotienten von Einsatz und Gewinn und nicht deren Absolutbeträge zählen. Mit Hilfe dieser Denkweise lassen sich die beiden Zahlen von Einsatz und Gewinn auf eine einzige Zahl, deren Quotienten, reduzieren.
Es sei noch bemerkt, dass alle Zahlungen in Nutzenseinheiten[9] stattfinden sollten, da sich sonst aufgrund der nichtlinearen Nützlichkeit von Geld („diminishing marginal utility") der Wettquotient ändern kann. Solange man aber in moderaten Betragshöhen bleibt, ist dieser Effekt nicht allzu schwerwiegend. Zudem lässt sich ein Dutch Book für inkohärente Wettraten am leichtesten kreieren, wenn die Einsätze vergleichbar sind, da ansonsten gewisse Interaktionen im Wettangebot kaschiert werden[10].
Bezüglich des Verkaufs von Wettangeboten vonseiten des Wettteilnehmers[11] stellt sich die Frage, weshalb er so etwas überhaupt tun sollte. Die Antwort hierauf liegt wiederum in der Fairness der Angebote, welche ja garantiert, dass der Teilnehmer indifferent gegenüber einer Annahme ist; aufgrund von Symmetriegründen gilt dann das Gleiche auch für den Verkauf. Jedoch wird hier vorausgesetzt, dass der Wettteilnehmer auch fair handelt. Möchte er sich jedoch einen unfairen Vorteil sichern, so könnte er aufgrund der folgenden Erkenntnis verfahren: Wenn man einen bestimmten Quotienten für eine Wette als fair betrachtet, so ist der Erwerb dieser Wette zu einem niedrigeren beziehungsweise der Verkauf zu einem höheren Quotienten vorteilhaft. Da die Annahme einer Wette mit monetären Konsequenzen verbunden ist,

[7] „Fair" soll hier bedeuten, dass man sich indifferent gegenüber dem Eingehen eines Wettangebotes präsentiert.

[8] Hierbei geht die Präsupposition ein, dass keine Risikoscheu des Wettteilnehmers vorliegt, also diesen keine großen Geldverluste schrecken. Darauf gehen wir gleich genauer ein.

[9] Ein oft vorgebrachter Einwand ist, dass viele Ansätze zur Erfassung von Nützlichkeiten, wie etwa bei Ramsey [180], schon Wahrscheinlichkeiten verwenden und somit nicht zu deren Erfassung taugen. Hierzu muss lediglich gesagt werden, dass das Nützlichkeitskonzept auch grundlegender wie in [5] betrachtet werden kann.

[10] Dies sieht man am einfachsten dadurch ein, dass man den Einsatz einer beliebigen Wette des Angebotes dermaßen erhöht, dass die anderen im Vergleich dazu zu vernachlässigen sind: Damit sind dann in jedem Fall die Verluste und Ausschüttungen der „Begleitwetten" so gering, dass sie nichts an der Tatsache ändern, dass allein die „überbewertete" Wette darüber entscheidet, ob man insgesamt gewinnt beziehungsweise Verlust macht, da man es näherungsweise mit einer einzelnen Wette zu tun hat, die, falls man nicht irrtümlich eine triviale Wettrate für ein kontingentes Ereignis gewählt hat, nicht „dutchbookable" (diese Wortschöpfung geht auf Hajek [93] zurück) ist.

[11] Der Verkauf einer Wette auf ein Ereignis A mit Rate r entspricht einer Wette auf das Gegenereignis $\overline{A}$ mit Rate $1 - r$.

spricht rational betrachtet nichts dagegen, die Wettraten geeignet zu modifizieren. Dies läuft darauf hinaus, dass der Wettteilnehmer durchaus auf verschiedene Raten bezüglich des gleichen Ereignisses bestehen könnte. Entscheidend ist also die Annahme der Fairness.
Allerdings sei im Vorgriff auf das Kommende bemerkt, dass die Bereitschaft, Wetten zu verkaufen, nicht so unwichtig ist, wie sie vielleicht erscheinen mag. Jedoch kann man eine Ausbeutung nicht einfach durch eine „einheitliche" Behandlung der Wetten in dem Sinne vermeiden, dass man sie entweder nur kauft oder verkauft. Man stelle sich etwa den Kauf zweier Wetten auf Ereignis und Gegenereignis mit gleichen Gewinnen vor, deren addierte Wettraten größer als eins sind[12]. Jedoch kann eine einheitliche Behandlung der Wetten im diachronen Szenario, welches wir in Unterabschnitt 1.6 dieses Kapitels behandeln werden, einer Korrektur der Wettrate dienen.

Es sollen noch zwei Einwände präsentiert werden, welche das Dutch-Book-Argument gar nicht diskreditieren und insofern unzulässig sind. Für das Wettszenario muss der Wettende faire Wettraten für alle Ereignisse der kanonischen Algebra festlegen[13] und sogar noch bereit sein, diese dem Buchmacher mitzuteilen. Doch sind die Annahmen keinesfalls schwerwiegend, da es nur im Interesse des Wettteilnehmers ist, wenn er sich ein umfassenderes Bild bezüglich der Bewertung der Ereignisse verschafft, und sich aus der Übermittelung der Wettraten keinerlei Pflicht ergibt ein Wettangebot, das mit Hilfe dieser Raten erstellt wird, anzunehmen. Man könnte etwa noch behaupten, dass der Buchmacher aus der Kenntnis aller Wettraten einen unfairen Vorteil ziehe, aber er muss ja schließlich wissen, welche Wettangebote der Wettteilnehmer prinzipiell akzeptieren könnte.

4.1.3 Korrespondenz von Glaubensgraden und Wettraten

Nun kommen wir zu einem sehr kritischen Punkt bezüglich der Aussagekraft des Dutch-Book-Arguments: Kann wirklich gerechtfertigt angenommen werden, dass die Wettraten den Glaubensgraden exakt entsprechen? Damit wird die Frage gestellt, ob man Glaubensgrade operationalistisch festsetzen kann oder darf. Glaubensgrade beschreiben oder drücken aus, „wie sehr" man von der Manifestation eines Ereignisses „ausgeht". Und man mag prima facie vermuten, dass Wettraten die gleiche Funktion erfüllen. Wir werden aber im Folgenden sehen, dass durch die operationalistische Definition gewisse Aspekte ins Spiel kommen können, die bei dieser Bewertung möglicherweise nicht angebracht sind. Damit soll nicht behauptet werden, dass man Wettraten niemals mit Glaubensgraden identifizieren kann, sondern nur, dass dies nicht immer der Fall sein muss, weshalb die Erfassung von Glaubensgraden durch Wetten möglicherweise ungebührlich eingeschränkt wird.

[12]Zum Beispiel Wette auf das betreffende Ereignis mit Einsatz (in Nutzenseinheiten) 2 und Gewinn 4 (Rate 1/2) sowie Wette auf das Gegenereignis mit Einsatz 3 und Gewinn 4 (Rate 3/4). Man gewinnt in jedem Fall 4, hat aber 5 ausgegeben.

[13]Vgl. [2].

Der erste schwerwiegende Kritikpunkt, warum Glaubensgrade nicht immer mit Wettraten übereinstimmen können, besteht darin, dass der reine Vorgang des Wettens einen Einfluss auf das Ereignis in Frage ausüben kann oder mit der Wette zusätzliche Konsequenzen für den Teilnehmer verbunden sind. Der Fall ist mit dem Fall einer „self-fulfilling prophecy" verwandt. Dabei wird das Ereignis unweigerlich modifiziert, was heißt, dass das Ereignis in seinem anfänglichen Hintergrund gar nicht durch Wetten bewertet werden kann. Derartige Einflüsse oder Konsequenzen können vielfältiger Natur sein: Etwa werden Leistungen eines Sportlers nach Eingehen einer Wette verändert, wenn die Tatsache, dass seine Ergebnisse Gegenstand einer Wette sind, einen ungewöhnlichen Ehrgeiz in ihm weckt. Oder es tritt die sogenannte „utility of gambling" in Erscheinung, wonach allein schon die Teilnahme an einem Glücksspiel einen gewissen Wert hat, für den man zu zahlen bereit ist. Während man erstere Begleiterscheinungen noch geeignet durch Geheimhaltung unterdrücken könnte, sind Letztere schwerer abwendbar, da sie in der speziellen Situation des Wettenden verankert sind.
Weiterhin spielen zwei Aspekte eine Rolle, die schon bereits bei der Diskussion des Wettszenarios angeklungen sind.
Die Identifikation von Glaubensgraden mit der Wettbereitschaft leidet besonders dann, wenn eine Risikoaversion des Wettenden besteht, was sich darauf beziehen soll, dass die absolute Höhe der Beträge eine Rolle bei der Festsetzung der Wettraten spielt, bei denen eigentlich nur deren Verhältnis eingehen sollte. Beispielsweise wird ein risikoscheuer Wettteilnehmer den Quotienten für eine Wette deutlich niedriger ansetzen, wenn potentiell ein großer Verlust entstehen könnte. Damit wird dann der Wettquotient durch die Risikoaversion unter dem eigentlich maßgeblichen Glaubensgrad situiert. Oft wird dann als Ausweg bei dem Wettszenario noch spezifiziert, dass nur geringe Einsätze verwendet werden. Aber schlimmstenfalls kann es auch eine kategorische Verweigerung von Wetten geben, was heißt, dass es einfach keine behavioristisch erfassbare Wettrate gibt.
Wie dem auch sei, *wenn* die Rate behavioral bestimmt werden soll, ist die Fairness des Wettteilnehmers entscheidend. Denn sonst könnte er auf die Idee kommen, immer nur dann ein Wettangebot anzunehmen, wenn er billiger kaufen oder teurer verkaufen kann. Das würde zu einem „nicht übereinstimmenden" Paar von Wettraten führen. Insofern Wahrscheinlichkeiten eine eindeutige Bewertung von Ereignissen darstellen, können sie aber nicht zwei verschiedene Werte haben.
Zudem muss festgestellt werden, dass bei der Herleitung von Wahrscheinlichkeiten über Wettraten auch bei einer grundsätzlichen Bereitschaft, an Wetten teilzunehmen, nicht alle Ereignisse erfasst werden können, denen man sinnvollerweise eine Wahrscheinlichkeit zuschreiben möchte. Etwa können Sachverhalte, die sich niemals endgültig verifizieren lassen[14], nicht beschrieben werden, da dann niemals der Ausgang der Wette bekannt wird. Aber selbst verifizierbare Sachverhalte bleiben nicht verschont: Es ist nicht möglich, eigenen Handlungen eine eindeutige Wettrate zuzu-

[14]Wie im vorigen Kapitel in Unterabschnitt 2.2 erwähnt wurde, fallen etwa Hypothesen über Naturgesetze darunter.

schreiben[15], was bedeutet, dass man auf diesem Weg keine konsistente Wahrscheinlichkeitsbewertung etablieren kann.

Nachdem nun dargestellt wurde, weshalb man generell mit einer Beeinträchtigung der Korrespondenz von Glaubensgraden und Wettraten rechnen muss, sollen abschließend Einwände entkräftet werden, welche diesbezüglich nicht zutreffen.
Ein nicht zutreffender Kritikpunkt gegen die Bestimmung von Glaubensgraden durch Wettraten ist der, dass die Wettquotienten eigentlich niemals den Glaubensgraden entsprechen können, da zwischen der Zahlung des Einsatzes und dem möglichen Gewinn eine gewisse Zeit vergeht[16]. Da dem Wettenden in dieser Zeitspanne sein Geld nicht zur Verfügung steht und somit die Wettprozedur mit zusätzlichen Nachteilen verbunden ist (beispielweise hätte er inzwischen den Einsatz irgendwo gewinnbringend anlegen können), setze er die Wettrate immer schon niedriger an. Dieser Einwand ist aber nicht substantieller Natur, da man den Wettvorgang ohne Beeinträchtigung des Dutch-Book-Arguments geeignet modifizieren kann: Alle Geldtransaktionen, seien es der Wetteinsatz oder die Zahlung des Gewinns, finden simultan zu einem Zeitpunkt statt, an dem der Ausgang des Wettereignisses bekannt ist. Auf diese Weise entstehen dem Wettenden keine zusätzlichen Unannehmlichkeiten.
Wenn man es akzeptiert hat, dass man Wetten nur mittels eines Quotienten beurteilt und man zu Glaubensgraden finden kann, die sich sogar durch reelle Zahlen beschreiben lassen, muss man fragen, inwieweit sie überhaupt formal übereinstimmen können. Mit Quotienten üblicher Währungseinheiten lassen sich ja nur rationale Zahlen darstellen, aber niemals irrationale. Hierzu lässt sich der folgende Ausweg präsentieren: Man geht zu einer virtuellen Währung über, die jegliche reelle Zahlen erlaubt. Auch wenn dies weit von den praktischen Standards entfernt ist, löst dieser Vorschlag alle Bedenken bezüglich der Möglichkeit einer rein formalen Korrespondenz auf.
Zuletzt wollen wir noch einen Einwand von Schick [193] und Maher [150] betrachten, der immer wieder noch als zusätzlicher Kritikpunkt vorgebracht wird und in der Literatur als „package principle" bekannt ist. Demzufolge bestehe von vornherein keine Unabhängigkeit zwischen den Wettraten, sondern ein Abhängigkeitsverhältnis: Die Wettraten gelten nur für Einzelwetten, jedoch nicht für kombinierte Angebote. Woher könnte sich aber eine solche Abhängigkeit ergeben? Genannt werden vor allem zwei Aspekte[17]: Etwa wird man durch mangelnde monetäre Ressourcen gezwungen

[15] Der Grund dafür wird im nächsten Kapitel in Unterabschnitt 1.2 besprochen.

[16] Dieser „Zins-Einwand" wurde zum Beispiel in [6] formuliert.

[17] Es wird noch ein dritter Aspekt genannt, welcher sich darauf bezieht, dass der Wettteilnehmer schon das Dutch Book vorausahnt. Da dieses ja eine Interaktion der Wetten ausnutzt, wird hier eine Abhängigkeit exemplifiziert. Dieser Einwand, welcher darin mündet, dass man das Dutch Book ja eigentlich gar nicht anzunehmen braucht, greift aber zu weit vor, denn hier in diesem Unterabschnitt beschäftigen wir uns nur damit, welche Probleme die Korrespondenz von Glaubensgraden und Wettraten belasten könnten, die nicht schon in der möglichen Bestrafung begründet sind. Auf diesen Aspekt werden wir im übernächsten Unterabschnitt eingehen, wo wir diskutieren, welche Relevanz des Dutch-Book-Arguments für die Glaubensgrade allein schon einer hypothetischen Ausnutzung entspringt.

nur verbilligte Wetten zu akzeptieren oder allein der Akt der Annahme einer Wette beeinflusst eine andere. Hierzu muss aber bemerkt werden, dass diese Kritikpunkte bereits oben bei den Einzelwetten vorgetragen wurden und es sich von selbst versteht, dass diese sich auch auf mehrere Wetten übertragen können. Insofern liegt hier kein neuer Einwand vor.

4.1.4 Zwischenfazit

Aufgrund der zahlreichen Einwände und Unstimmigkeiten bezüglich der exakten Korrespondenz von Glaubensgraden und Wettraten bietet es sich nicht im Sinne des Behaviorismus an, Glaubensgrade über Verhalten zu definieren. Dies erkennen auch Hajek und Eriksson in ihrem Artikel „What are degrees of belief?" [63] , in dem sie viele der oben erwähnten Probleme bei den führenden Ansätzen zur Erfassung von Glaubensgraden mittels Verhalten[18] identifizieren. Zusätzlich trägt dazu bei, dass es sich bei Wetten möglicherweise sogar um ein erzwungenes Verhalten handeln kann. Ihre Schlussfolgerung besteht in einem Primitivismus, also Glaubensgrade als Grundkonzept zu verstehen, das sich nicht mittels anderer Konzepte ausdrücken lässt. Als Vergleich ziehen sie physikalische Grundgrößen wie etwa die elektrische Ladung heran, über die man trotz des Umstandes, dass man sie auf keine andere physikalische Größe zurückführen kann, viele gehaltvolle Aussagen machen kann.

4.1.5 Die epistemische Relevanz des Dutch-Book-Arguments

Wir haben also gesehen, dass Glaubensgrade in einem normativen Sinne als eindimensionale Größen auf einer beschränkten Skala beschreibbar sein sollten. Die exakte Korrespondenz zu Wettraten kann aufgrund mehrfacher Probleme, die in der operationalistischen Erfassung gründen, nicht garantiert werden. Wenn wir aber nun annehmen, dass in einem geeigneten Fall keines der oben genannten Probleme die Wettquotienten von den zugehörigen Glaubensgraden abändert, also die Glaubensgrade korrekt durch Wettangebote erfasst werden, was würde das Dutch-Book-Argument dann wirklich zeigen? Beispielsweise kann man ja unter alleiniger Berücksichtigung der oben gemachten Überlegungen bezüglich Glaubensgraden als prinzipielle Handlungsgrundlage im Widerspruch zu den Kolmogorov-Axiomen für ein Ereignis A und sein Gegenereignis die Grade $P(A) = 0,7$ und $P(\overline{A}) = 0,6$ festlegen, wodurch deutlich ausgezeichnet wird, welches der beiden Ereignisse man als wahrscheinlicher einschätzt. Muss man aber noch mehr verlangen?

Bekannterweise verläuft das Argument so: Mit inkohärenten Wettraten kann ein

[18] Zu diesen gehören die Ansätze von DeFinetti [44], Jeffrey [113] und Ramsey [180]. Während Jeffrey und Ramsey Glaubensgrade nur mittels Wettverhalten messen möchten, setzt sie DeFinetti sogar gleich. Ramsey ist sich durchaus bewusst, dass sich dabei Probleme ergeben könnten, aber er bemerkt dazu nur, dass sich eine Wettrate zu einem Glaubensgrad wie die klassische zu der relativistischen Physik verhalte: In den meisten Fällen tauge sie zur Beschreibung. Damit gibt er aber schon die Inkompatibilität zu und ignoriert sie im Weiteren.

Dutch Book von einem hinterhältigen Buchmacher präsentiert werden, weshalb man einsehen sollte, dass diese Glaubensgrade irrational waren. Aber um die volle Aussagekraft dieser Feststellung beurteilen zu können, muss man sich genau klarmachen, wie die Möglichkeit zur Erstellung eines Dutch Books wirklich ausgenutzt wird und wie die nachteiligen Konsequenzen zu deuten sind; denn nur der Umstand, dass man nach einer bestimmten Handlung mit einer Bestrafung zu rechnen hat, impliziert nicht, dass die Handlung unberechtigt war. Ein Extremfall hilft diese Einsicht zu veranschaulichen: Etwa könnte eine „bayesianische Gedankenpolizei" jeden foltern, der nicht behauptet, dass der Mond aus grünem Käse bestehe[19].

Grundsätzlich muss man hier sauber zwischen Rationalität in einem praktischen und in einem epistemischen Sinne unterscheiden. Bei der praktischen Rationalität geht es, grob gesagt, darum, seine Handlungen so zu wählen, dass man mit möglichst guten Konsequenzen konfrontiert wird[20], wohingegen es bei der epistemischen Rationalität um eine korrekte Wahrnehmung von Sachverhalten geht. Diese Unterscheidung erlaubt es uns, das obige Beispiel richtig zu verstehen: Aus dem Folterszenario kann man lediglich eine Relevanz für die praktische, aber nicht die epistemische Rationalität ableiten.

Die Unterscheidung wird noch deutlicher, wenn wir „zyklische Präferenzen" zum Vergleich heranziehen. Sie tauchen bei Schick in [193] auf, um seinen Einwand des Package Principles zu untermauern: Hier sehe man besonders gut, dass die Zusammenfügung von möglicherweise gut begründeten Einzelpräferenzen in einem irrationalen Handeln resultiert, wodurch man schließlich erkenne, dass auch Wettraten immer in Bezug auf deren zur Geltung kommenden Gesamtheit beurteilt werden müssen. Dieser Vergleich exemplifiziert aber gerade eine andere wichtige Feststellung: Auch wenn zyklische Präferenzen zu suboptimalen Entscheidungen führen können, wenn sie als Handlungsgrundlage herangezogen werden, heißt das jedoch noch lange nicht, dass eine zyklische Ordnung nicht tatsächlich bestehen kann; vielmehr ist sie ein Phänomen, welches man immer wieder beobachten kann[21]. Insofern ein deutlicher Unterschied zwischen der korrekten Erfassung eines Sachverhalts und dessen Verwendung als Handlungsgrundlage besteht, kann man nicht den Schluss ziehen, dass bei einer Ausbeutung eine fehlerhafte Wahrnehmung ausgenutzt wurde. Damit zeigt der Vergleich von Schick eigentlich nur, dass gerade epistemische und praktische Rationalität streng zu trennen sind.

Zudem erlaubt uns die eingeführte Differenzierung, zwei häufig formulierte Vorbehalte gegen das Dutch-Book-Argument richtig zu verstehen. Der erste Einwand sagt, man müsse, damit man irgendeine Relevanz aus dem Argument ableiten könne, immer schon annehmen, dass jemand so gemein sei, uns auszunutzen [6]. Der zweite

[19] Dies ist die Weiterführung eines Beispiels von Christensen [36], in dem er behauptet, man könne sich im Dutch-Book-Szenario statt einer Ausnutzung durch einen Buchmacher genau so gut eine Folter durch eine bayesianische Gedankenpolizei vorstellen.

[20] Es kann wohl mit Recht behauptet werden, dass jede Handlung, die einen Nachteil mit sich bringt, irrational ist, solange sie nicht gleichzeitig einen positiven Ausgleich schafft, der diesen überwiegt. Allein dadurch, dass sich ein Nachteil irgendeiner Art ergibt, wird noch keine Aktion als unvernünftig ausgezeichnet.

[21] Man denke etwa an sportliche Vergleiche.

Vorbehalt fragt: Wieso sollte man überhaupt ein Dutch Book akzeptieren [129], [35], [8], [91], [36]? Unter der oben gemachten Annahme entspricht der Wettvorgang nur einer Sichtbarmachung der Glaubensgrade. Damit kann man das Wettszenario als Gedankenexperiment betrachten, um sich möglicher Konsequenzen bewusst zu werden. Daher treffen beide Einwände nicht den Kern der Sache. Denn für das Gedankenexperiment ist es unerheblich, ob die Inkohärenz in einem Wettangebot tatsächlich ausgenutzt wird und zu einem monetären Verlust führt. Vielmehr geht es darum, einen möglichen epistemischen Defekt des Wettenden aufzudecken. Wenn man die Aussagekraft des Dutch-Book-Arguments wirklich verstehen möchte, ist es essentiell, dass man erkennt, welche Spielräume einem das Wettszenario offen lässt, und damit die Frage beantworten kann, was genau der Buchmacher ausnutzt. Denn allein ein schlechtes Angebot zeigt ohne das Verständnis des ausgenutzten Mechanismus nicht das Geringste. Es kann etwa auch unter den Voraussetzungen, die an das Wettszenario gemacht werden, einem Teilnehmer mit perfekt kohärenten Glaubensgraden ein Angebot präsentiert werden, bei dem er niemals gewinnen kann: Der Buchmacher muss ihm lediglich eine Wette verkaufen und diese gleichzeitig zurückkaufen[22]. Demnach zu folgern, dass die Glaubensgrade irrational sind, wenn ein Angebot gemacht werden kann, das nicht gewinnbar ist, liegt sicherlich nicht im Sinn der Sache. Hierauf könnte man entgegnen, dass es letztendlich um einen garantierten Verlust und nicht die mangelnde Gewinnmöglichkeit gehe. Jedoch zeigt eine einfache Abänderung des gerade gegebenen Beispiels, dass auch dies zu absurden Folgerungen führte: Der Buchmacher erhebt noch eine zusätzliche Gebühr, da das ursprüngliche Angebot zu gut für den Wettteilnehmer war (immerhin konnte er dies ja nie verlieren).

Das obige Beispiel der Gedankenpolizei wurde bewusst so gewählt, dass es das Originalszenario, in dem ein Buchmacher, der über ausreichenden Verstand verfügt, den Wettenden unter alleiniger Berücksichtigung seiner Wettraten ausnutzen möchte, modifiziert und eine Aussage über die praktische Rationalität macht; insofern ist jetzt genau darauf zu achten, inwiefern im Originalszenario die epistemische Rationalität berührt wird. Die verbleibende Frage ist also, was der Buchmacher dabei genau ausnutzt.

Bei jeweils gleichen Gewinnen sind zwei Wetten auf disjunkte Ereignisse mit Kosten K_1 und K_2 bezüglich des Kapitalflusses äquivalent zu einer Wette auf das Gesamtereignis mit Kosten $K_1 + K_2$. Genau dies wird in dem Dutch-Book-Argument ausgenutzt: Erkennt der Wettteilnehmer die Gleichheit nicht, so kann er bestraft werden. Es seien G_1, G_2 vom Buchmacher frei wählbar und α_1, α_2 Wettquotienten für das gleiche Ereignis[23]. Im Fall, dass das betreffende Ereignis eintritt, ergibt sich für den Wettenden der Kapitalfluss $M_A = G_1(1-\alpha_1) + G_2(1-\alpha_2)$, ansonsten $M_{\overline{A}} = -G_1\alpha_1 - G_2\alpha_2$. Das Paar $(M_A, M_{\overline{A}})$ kann man wieder als Ergebnis einer

[22] Natürlich entspricht dies genau der Rücknahme der Wette, aber auf dem Papier bestehen dann zwei Wetten, deren gemeinsame Akzeptanz erstens nichts kostet und zweitens eine kombinierte Gewinnausschüttung von null nach sich zieht.

[23] Wir greifen hierbei auf unsere Notation aus Kapitel 2 in Unterabschnitt 2.3 zurück.

Matrix-Vektor-Multiplikation verstehen, wenn man die aus den Wettquotienten gebildete Matrix mit dem Vektor (G_1, G_2) multipliziert. Falls die Determinante der Matrix ungleich null ist, können M_A und $M_{\overline{A}}$ beliebige Werte annehmen, was insbesondere auch heißt, dass man (G_1, G_2) so wählen kann, dass beide Komponenten negativ sind und der Wettende somit garantiert verliert. Dies kann offensichtlich geschehen, wenn α_1 und α_2 nicht übereinstimmen:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\alpha_1 & 1-\alpha_2 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{pmatrix} = \alpha_1 - \alpha_2.$$

Somit ist zu bemerken, dass der eigentliche Kern des Arguments die Ausnutzung einer inkonsistenten Bewertung des gleichen Wettangebotes ist. Dass widersprüchliche Beurteilungen derselben Sache irrational sind, steht außer Frage. Dies wird aber durch das Dutch-Book-Argument in seiner gängigen Darstellungsweise oft verschleiert, denn allein aus der Tatsache, dass man von einem Buchmacher ausgenutzt werden kann, wird auf die Inadäquatheit der Glaubensgrade gefolgert, ohne auf das tatsächliche Problem einzugehen. Es wird lediglich immer von einem „epistemischen Defekt" gesprochen, ohne diesen zu explizieren. Das führt aber insofern zu Missverständnissen, als es dazu verleitet, zu denken, dass die mögliche Existenz von Buchmachern, die uns hereinlegen können, die letzte Instanz von Rationalitätskriterien darstellen.

Zu der gleichen Folgerung gelangen auch Armendt [4] und Skyrms [206], [207], [208], wobei es von Armendt besonders deutlich formuliert wird: „I say it *is* a flaw of rationality to give, at the same time, two different choice-guiding evaluations to the same thing. Call this *divided-mind* inconsistency"[24]. Für sie stellt das Wettszenario mit dem Dutch Book eine Dramatisierung des eigentlichen epistemischen Defekts dar, welcher darin besteht, dass *dieselbe* Sache verschiedene Bewertungen hinsichtlich des gleichen Aspekts erhält. Doch darüber redet DeFinetti nicht. Er operiert lieber mit dem Ausbeutungsszenario. Er will die konsistente Bewertung einer Option mittels einer drohenden Ausbeutung erzwingen, ohne ein Wort über die eigentliche Problematik zu verlieren. Um alle solchen inkonsistenten Evaluationen des Wettteilnehmers bestrafen zu können, ist es essentiell, dass der Wettteilnehmer auch bereit ist, Wetten zu verkaufen[25], da damit zwei äquivalente Angebote direkt miteinander verglichen werden können und der Geldfluss unabhängig vom Ausgang des fraglichen Ereignisses bereits feststeht.

Somit erfüllt das Dutch-Book-Argument die Funktion, einen verdeckten epistemi-

[24]Hierbei muss man „at the same time" korrekt verstehen: Natürlich können die inkonsistenten Bewertungen auch zeitlich nacheinander abgefragt werden und insgesamt zu einem Dutch Book führen. Gemeint ist aber, dass in der Zwischenzeit nichts den Kenntnisstand des epistemischen Subjekts verändert hat. Wie sich das Spannungsfeld zwischen unterschiedlichen Bewertungen und Wissenszuwachs präsentiert, werden wir im folgenden Unterabschnitt über diachrone Dutch Books genauer diskutieren.

[25]In dem Fall, dass sich in einem dichotomen Szenario die Wettraten der komplementären Ereignisse auf weniger als eins summieren, kann der Teilnehmer nicht bestraft werden, wenn er sich weigert, Wetten zu verkaufen. Dies kann man sich einfach mittels des Determinantenformalismus klarmachen.

schen Defekt, die inkorrekte Erfassung von mengentheoretischen Überlegungen, aufzudecken. Jedoch behaupten Hajek [93] und Vineberg [237], dass diese Funktion gar nicht geleistet werden könne. Der wesentliche Einwand läuft darauf hinaus, dass man von der intellektuellen Kapazität des Wettteilnehmers gar nicht einfach erwarten könne, dass sie ihm die Identifikation zweier Dinge erlaube, bei denen es sich tatsächlich um dieselbe Sache handelt. So schreibt etwa Hajek: „But is a failure to recognize this the sin of *inconsistency*, a sin of *commission*, or is it rather a failure of logical omniscience, a sin of *omission*?". Insofern könne das Dutch-Book-Argument die ihm zugedachte Rolle nicht spielen, da es sehr schwierig zu erkennen sei, was mit den Wettraten in einem logischen Sinne genau bewertet würde. Vineberg konzentriert sich besonders auf die Kritisierung des Normalisierungsaxioms: Wie könne man einsehen, dass der Tautologie immer Wahrscheinlichkeit eins zukommen müsse, denn es sei ja auch denkbar, dass manche logisch äquivalente Darstellungen eine geringere Wahrscheinlichkeit erhielten? Hierzu sei lediglich bemerkt, dass diese Einwände nicht überzeugend sind. Damit man von einem Argument überzeugt werden kann, muss man natürlich in der Lage sein, es zu verstehen. Liegt dieses Verständnis aber ausnahmsweise nicht vor, so wird dadurch das Argument als solches keinesfalls diskreditiert. Zudem wird für das Verständnis in unserem Fall nur eine äußerst elementare und wichtige Fähigkeit, nämlich das Erkennen von logisch äquivalenten Ausdrücken, verlangt.

Aber zurück zur eigentlichen Frage: Was hat das alles mit Glaubensgraden zu tun? Wird im Wettszenario eine Identität von Wettangeboten vom Wettteilnehmer nicht erkannt, so kann dies, da von ihm erwartet wird, dass er auch selbst Wetten verkauft, hemmungslos von einem Buchmacher ausgenutzt werden. Wir nahmen in diesem Unterabschnitt an, dass die Wettraten mit den Glaubensgraden identisch sind. Was ist aber, wenn die tatsächlichen Glaubensgrade prinzipiell nicht durch Wetten erfasst werden können? Wieso sollte man direkt für sie die Additivität fordern? Dass dies nicht die einzige sinnvolle Möglichkeit darstellt, Glaubensgrade zu kombinieren, sollte Kapitel 3 Abschnitt 1 verdeutlicht haben, wo mehrere Alternativen vorgestellt wurden. Und insofern ist zu bemerken, dass das Wettszenario genau so gewählt wurde, dass dort die Additivität gilt. In [95] werden auch Begründungen durch Wetten für obere beziehungsweise untere Wahrscheinlichkeiten und Möglichkeitsmaße erwähnt. Damit geht es beim Dutch-Book-Argument im Endeffekt um die Befolgung einer festgelegten Beziehung und nicht um die Diskussion über die Festlegung dieser Relation.

Das ist der eigentliche Kern: Man setzt die kombinierten Glaubensgrade mittels einer Beziehung zwischen den gewöhnlichen Glaubensgraden fest und erhält auf diese Weise eine Identität. Das Wettszenario wird so gewählt, dass sie dort gilt. Damit verbleibt immer noch die Frage, weshalb man fordern sollte, dass sich die Glaubensgrade disjunkter Ereignisse bei Vereinigung addieren. Natürlich kann man anführen, dass dies den Abgleich mit anderen Wahrscheinlichkeitsinterpretationen herstelle. Doch wir wollen nach davon unabhängigen Gründen fragen.

Warum sich Glaubensgrade tatsächlich formal wie Wahrscheinlichkeiten verhalten sollten, erklären Hajek und Eriksson [63] mittels des sogenannten „Canberra plan"[26], welcher sie zum dem Credo „Ramsify over the folk platitudes regarding the concept." führt. Dies ist dadurch motiviert, dass Ramsey trotz allem die beste philosophische Arbeit zum Thema Glaubensgrade abgeliefert habe; aber anstatt sie mittels Verhalten zu erfassen[27], werden sie einfach postuliert: „... when trying to provide the Ramsey sentence for 'degree of belief'. It is the thing that should obey the probability calculus (and thus provides an interpretation of it) ... ". Die Notwendigkeit dieses Postulats ergebe sich daraus, dass man aufgrund von „folk psychology"[28] das Gefühl habe, dass Glaubensgrade mindestens eine Halbordnung einnehmen müssten. Wenn man das nun mit der in 1.1 vertretenen Etablierung der Glaubensgrade vergleicht, ist zu bemerken, dass hier nicht der Umweg über psychologische Betrachtungen gewählt wird, um die Linearität der Glaubensgrade zu erreichen[29]. Sie ergibt sich hier vielmehr aus der normativen Überlegung, dass Glaubensgrade die Basis für Handlungen bilden können sollten. Diese war schon in der Arbeit von Ramsey gegenwärtig, da auch er Glaubensgrade als prinzipielle Grundlage für Aktionen ansah, allerdings ging er direkt zu deren behavioristischen Erfassung über, um deren Additivität zu zeigen. Der Grund, warum Ramsey den behavioristischen Weg einschlug, lag darin, dass er der Erste war, der ein Repräsentationstheorem[30] beweisen konnte, welches die Präferenzen eines Entscheiders mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß und einer Nutzensfunktion in Beziehung setzt[31].

Wenn man die Glaubensgrade auf das Intervall $[0,1]$ abbildet und die Grenzen mit den trivialen Ereignissen identifiziert, muss nur noch erklärt werden, warum sich Glaubensgrade additiv für Vereinigungen disjunkter Ereignisse verhalten sollten, um die Erfüllung der bekannten Kolmogorov-Axiome zu erhalten. Gibt es irgendwelche Gründe, warum man von dieser Additivität ausgehen sollte[32], wenn man nicht den Weg der reinen Postulierung wählen möchte? Man kann an die Natürlichkeit der Additivität appellieren. Die Addition ist nicht einfach irgendeine Rechenart, sondern sie ist die direkte und unmittelbare Übersetzung beziehungsweise Formalisierung der Vereinigung in eine abstrakte Betrachtungsweise. Insofern ist sie vollkommen natürlich: Wenn man die Ereignisse disjunkt vereinigt, sollten sich eigentlich auch die Glaubensgrade addieren[33]. Hier wurde vorsichtigerweise das Wort „eigentlich" eingefügt, denn es wäre denkbar, dass die Vereinigung zweier Ereignisse in etwas

[26] Die Referenz hierfür ist Jackson „From Metaphysics to Ethics" [109] .

[27] Ramsey bemerkt dazu: „...; it [Glaubensgrad] has no precise meaning unless we specify more exactly how it is to be measured.".

[28] Diese zeige sich an Ausdrücken wie „Ich bin mir sicher, dass *p*." oder „Ich bin mir nicht ganz sicher, dass *p*." .

[29] Die Grenzen an null und eins werden durch Hajek und Eriksson ähnlich psychologisch motiviert.

[30] Das ist jetzt nicht mit dem Repräsentationstheorem von DeFinetti zu verwechseln. Leider haben sich in der Literatur gleichlautende Bezeichnungen eingebürgert. Andere Repräsentationstheoreme im obigen Sinne finden sich zum Beispiel bei Savage [190] und Jeffrey [113].

[31] In Kapitel 5 Unterabschnitt 1.1 gehen wir ausführlicher auf diesen Zusammenhang ein.

[32] Wäre die untere Grenze nicht die Null, so wäre diese Additivität bezüglich des Abstandes zur unteren Schranke zu verstehen.

[33] Glaubensgrade beschreiben ja, wie stark man von einem Ereignis erwartet, dass es sich manifestiert.

vollständig Neuem und Andersartigem resultiert (man vergegenwärtige sich bloß chemische Vorgänge). So etwas kann hier aber nicht passieren, da, insofern es sich um disjunkte Ereignisse, also verschiedene mögliche Welten, handelt, diese sich in keinster Weise beeinflussen können. Sie existieren nicht nebeneinander in der tatsächlichen Welt, sondern nur in der Vorstellung von Menschen als Modalitäten. Wenn mögliche Welten Mengenstrukturen entsprechen, so sollten sich die dazugehörigen Glaubensgrade bei einer disjunkten Vereinigung von Ereignissen natürlicherweise auch addieren.

Die Darstellung gerade eben bezog sich auf die Etablierung der Additivität, doch wie ist es um die Rechtfertigung der Quotientenformel für die konditionierte Wahrscheinlichkeit mittels bedingter Wetten bestellt? Es ist festzustellen, dass man hier die gleichen Konsequenzen bezüglich der Aussagekraft über den epistemischen Gehalt ziehen muss.
Zunächst ist wieder zu bemerken, dass bedingte Wettraten und bedingte Glaubensgrade aufgrund der operationalen Abfrage keinesfalls übereinstimmen müssen; die bereits genannten Gründe lassen sich entsprechend übertragen. Allerdings trifft ein oft zusätzlich formulierter Einwand gegen die Korrespondenz nicht zu. Dieser bezieht sich auf einen ganz bestimmten Typ von konditionierten Wahrscheinlichkeiten: Man betrachtet etwa die Wahrscheinlichkeit, dass man merkt, von der CIA überwacht zu werden, unter der Bedingung, dass dies tatsächlich so ist[34]. Die Argumentation besagt, dass, falls man wirklich überwacht wird, die Wahrscheinlichkeit sehr gering sei dies zu bemerken, da die Leute von der CIA Spezialisten auf ihrem Gebiet sind und damit insbesondere jegliche Überwachungsaktivitäten gut tarnen können. Jedoch sollte man auf die korrespondierende bedingte Wette eine hohe Rate ansetzen, da im Fall, dass die Wette zur Geltung kommt, die Bedingung erfüllt ist und man damit über die Spionageaktivität Bescheid weiß. Hierzu muss allerdings gesagt werden, dass unter der Deutung der bedingten Wahrscheinlichkeit, für die wir uns ausgesprochen haben, diese Diskrepanz nicht besteht. Bedingungen kodieren hypothetische Informationszuwächse, weshalb die Bedingung dem epistemischen Subjekt bei der Festsetzung des bedingten Glaubensgrades bekannt ist, also es insbesondere von der Überwachung weiß. Ansonsten würde die epistemische Deutung der Wahrscheinlichkeit nicht durchgehalten, wenn die Bedingung einen objektiven Sachverhalt darstellt, welcher dem epistemischen Subjekt nicht bekannt sein muss.
Welche Gleichheit von Wettangeboten wird hier ausgenutzt? Zusätzlich zu der auf B bedingten Wetten für A werden noch die Wetten auf B und auf $A \cap B$ betrachtet. Es seien die zugehörigen Wettraten c, b und a. Wenn man dann jeweils Einheitseinsätze wählt, aber für die Wette auf B den Einsatz c, so entspricht diese zusammen mit der bedingten Wette einer Wette auf $A \cap B$ mit $a = bc$[35]. Es liegt wiederum eine Identität von Wettangeboten vor und falls der Wettende dies nicht realisiert, so kann er aufgrund des Wettszenarios, welches den gleichzeitigen Kauf und Verkauf

[34] Das Beispiel stammt aus [105].

[35] Das kann man sich leicht klarmachen, wenn man die Zahlungen in allen möglichen Fällen vergleicht.

von Wetten erlaubt, von einem cleveren Buchmacher, der um diese Gleichheit weiß, bestraft werden.
Was wären natürliche Gründe, ein Wettszenario zu wählen, in dem genau diese Identität gilt? Ausgehend von einer Menge an möglichen Welten stellt man fest, dass bestimmte davon nicht mehr in Frage kommen. Was liegt dann näher, als diese aus der Modellierung auszuschließen[36]? Wie wir bereits sahen, sollten die Wahrscheinlichkeiten von möglichen Welten vernünftigerweise die Eigenschaft haben, dass sich ihre Werte auf eins aufsummieren. Dies ist für die übrig gebliebenen möglichen Welten nicht mehr der Fall, da durch den Ausschluss Masse verloren ging. Die Frage ist also, wie man die Masse, die durch die Exklusion der mit der Erfahrung inkompatiblen möglichen Welten verloren ging, auf die übrig gebliebenen Welten verteilt. Da die hinzugewonnene Information zwar den Ausschluss bestimmter Welten erlaubt, aber über die verbliebenen nichts Neues aussagt, sollten ihre Bewertungen relativ zu einander erhalten bleiben; genau das passiert, wenn man die Wahrscheinlichkeiten der restlichen möglichen Welten nun bezüglich ihrer Gesamtmasse normiert.

Zusammenfassend können wir damit feststellen: Wenn man direkt von den Glaubensgraden ausgeht, besteht die natürliche Begründung der Kolmogorov-Axiome in mengentheoretischen Überlegungen, welche sich durchaus mit der klassischen Interpretation der Wahrscheinlichkeit beziehungsweise der induktiven Logik à la Carnap in Verbindung bringen lassen. Hätte man dies gleich anfänglich so präsentiert, so wäre die subjektivistische Begründung wenig eindrucksvoll gewesen. Die damals noch junge subjektivistische Deutung der Wahrscheinlichkeit brauchte eine originelle Fundierung der wahrscheinlichkeitstheoretischen Axiome, um sich von den bisherigen Interpretationen abzuheben. Aber auf die Dauer hält die Identifikation von Glaubensgraden mit Wettraten aufgrund der zahlreichen Einwände, die gegen den Behaviorismus formuliert wurden, einer detaillierten Analyse nicht stand. In diesem Sinne ist das Dutch-Book-Argument als Relikt aufzufassen, das seinen Zweck insoweit erfüllt hat, als dass es dem Bayesianismus eine gehörige Aufmerksamkeit verschaffte.

4.1.6 Ein diachrones Dutch-Book-Argument

Die Funktion, welche dem Dutch-Book-Argument zugedacht wird, ist die Etablierung der Quotientenformel für bedingte Glaubensgrade sowie der Additivität für Glaubensgrade im Allgemeinen. Obwohl es nicht immer explizit betont wird, geht man beim Wettszenario davon aus, dass alle Wetten zum gleichen Zeitpunkt angeboten werden. Grundsätzlich ist es auch denkbar, dass die Wettangebote sequentiell präsentiert werden, wobei sich die speziellen Angebote an bestimmten Informationszuwächsen orientieren. Auch unter solchen Umständen lässt sich ein Dutch Book aufstellen. Deshalb wird zur Abgrenzung die erstere Variante als synchrones und die Letztere als diachrones Dutch Book bezeichnet.

[36]Dies wird mit Zuweisungen von trivialen Wahrscheinlichkeiten erreicht.

In Unterabschnitt 1.5 von Kapitel 2 erwähnten wir schon, dass der gemäßigte Bayesianismus mehrere Expertenprinzipien für eine sinnvolle Zuweisung von Glaubensgraden bereitstellt. Das vernünftigste unter ihnen ist sicherlich das Principal Principle von Lewis, welches nahelegt, die Glaubensgrade an einer objektiven Wahrscheinlichkeitsinterpretation, etwa einer relativen Häufigkeit, anzulehnen[37]. Viel umstrittener ist dagegen das Reflektionsprinzip von VanFraassen, welches eine Angleichung gegenwärtiger an zukünftige Glaubensgrade vorschreibt. Die Standardkritik bezieht sich darauf, dass es nicht klar ist, unter welchen Bedingungen die zukünftigen Einschätzungen getätigt werden. Eine Übernahme erscheint sinnvoll, wenn diese einen Informationsgewinn kodieren; werden sie stattdessen bei einer Einschränkung der kognitiven Fähigkeiten wie zum Beispiel Rauschzuständen getätigt, so sollte man davon Abstand nehmen. Dieser offensichtliche Einwand kann als Mahnung betrachtet werden, nur ausgewählte Glaubensgrade zu übernehmen. Allerdings existiert ein diachrones Dutch-Book-Argument zur situationsunabhängigen Begründung des Reflektionsprinzips, welches wir uns nun vergegenwärtigen wollen. Dieses Argument zeigt, dass ein diachrones Dutch Book möglich ist, wenn das Reflektionsprinzip nicht befolgt wird. Es bietet sich folgendermaßen dar.

Es geht um zwei Ereignisse A und B und zwei Zeitpunkte $t < t'$. Die Glaubensgrade des Wettteilnehmers zu diesen Zeitpunkten seien durch P und P' beschrieben, welche natürlich nicht identisch sein müssen. Das Ereignis A kann erst nach t' eintreten und bei B handelt es sich um eine Aussage über den Glaubensgrad zum Zeitpunkt t' bezüglich A, nämlich dass $\{P'(A) = b\}$ gelte. Nehmen wir nun an, dass im Widerspruch zum Reflektionsprinzip $P(A|B) = a$ mit $a \neq b$ gelte. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei nun $a > b$[38] und zudem gelte $P(B) = c$, was den Glaubensgrad des Wettteilnehmers bezüglich seiner Meinungsänderung darstellt. Zum Zeitpunkt t bietet der Buchmacher eine Wette auf B mit Einsatz c und Gewinn 1 sowie eine auf B bedingte Wette für A mit Einsatz da und Gewinn d an, wobei für d gilt: $d > (1-c)/(a-b)$. Falls B nicht eintritt, so ist der Buchmacher zufrieden; ansonsten bietet er noch zum Zeitpunkt t' an, eine Wette auf A mit Einsatz db und Gewinn d vom Wettteilnehmer zu kaufen. Diese Angebote sind aus der Sicht des Wettteilnehmers alle in dem Sinne fair, dass die Quotienten aus Einsatz und Gewinn genau seinen Glaubensgraden entsprechen. Falls der Wettteilnehmer nun alle diese Angebote annimmt, so verliert er garantiert einen bestimmten Währungsbetrag. Tritt B nicht ein, dann wird die bedingte Wette annuliert und er verliert die Wette auf B, was für ihn einen Verlust von $-c$ bedeutet. Wenn sich jedoch B manifestiert, es also zu einem Meinungswechsel kommt, so gewinnt er zwar $1 - c$, hat aber für die Wetten auf A den Betrag $d(b - a)$ ausgegeben; dies geschieht unabhängig davon, ob

[37] Dieses käme etwa im folgenden Fall zum Zuge: Ein Würfel liefert in den ersten Würfen fast nur eine einzige Zahl, jedoch weiß man um dessen annähernd vollkommene Homogenität. Statt im Sinne des radikalen Subjektivismus à la DeFinetti davon auszugehen, dass der Würfel gezinkt ist, sollte die Information über seine Beschaffenheit Priorität haben, weil sie ein übergeordnetes Wissen darstellt, das die reine Beobachtung der Wurfresultate transzendiert.

[38] Andernfalls lässt sich das Argument einfach anpassen, damit es das gleiche Resultat liefert.

A überhaupt eintritt, da sowohl eine Wette auf A gekauft als auch verkauft wurde (die Gewinnzahlungen gleichen sich somit aus, falls A zustande kommt, und nur die Einsätze zählen). Das heißt, dass der Wettteilnehmer bei Eintreten von B mit dem Kapitalfluss $(1-c)+d(b-a)$ konfrontiert ist, welcher nach obiger Wahl der Zahlenwerte negativ ist und somit ebenfalls einen Verlust darstellt[39]. Wären in diesem Szenario a und b identisch gewesen, so hätte es eine echte Gewinnmöglichkeit für den Wettenden gegeben.
Wie man merkt, kann man mit Hilfe dieses Arguments unabhängig davon, wie die zukünftigen Glaubensgrade überhaupt zustande kamen, begründen, weshalb die gegenwärtigen Glaubensgrade ihnen entsprechen sollten; denn entscheidend ist lediglich, dass man nicht von einem Buchmacher ausgenutzt wird. Offensichtlich wird hier allein eine Frage der praktischen Rationalität angesprochen. Selbst in dem Fall, dass die zukünftigen Glaubensgrade unter einer kognitiven Einschränkung festgesetzt werden, muss man sie akzeptieren, um keine Inkonsistenz zu offenbaren; und das ungeachtet dessen, ob diese Inkonsistenz einen guten Grund hat[40]. In dem diachronen ist es im Gegenteil zum synchronen Szenario durchaus berechtigt, einer Sache unterschiedliche Zuweisungen zu geben, gerade weil sie zu unterschiedlichen Zeitpunkten stattfinden und damit unterschiedliche Informationen kodieren können. Um das noch extremer deutlich zu machen: Sollten sich die Glaubensgrade eines epistemischen Subjekts *jemals* ändern, dann gibt es, wenn auch nicht von vornherein vom Buchmacher planbar, ein Wettangebot, bei dem der Teilnehmer garantiert verliert. Dieser Umstand basiert darauf, dass durch den Verkauf von Wetten vonseiten des Teilnehmers ungleiche Wettraten direkt miteinander verglichen werden können. Würde das Wettszenario den gleichzeitigen Verkauf von Wetten durch den Wettteilnehmer verbieten, so führte jede weitere von ihm auf ein bestimmtes Ereignis eingegangene Wette mit unterschiedlicher Wettrate zu einer Modifikation der damit resultierenden Gesamtwettrate, was insofern nicht verfänglich ist, als dass es weiterhin allein am Eintreten des Ereignisses liegt, ob er gewinnt oder verliert. Angenommen, es besteht bereits eine Wette mit Einsatz ca und dem Gewinn c, dann entspricht die Hinzunahme einer Wette mit Kosten db und Gewinn d einer Gesamtwette mit Einsatz $ca+db$ und Gewinn $c+d$. Für die Wettrate bedeutet dies, dass sie sich von a auf $(ca+db)/(d+c)$ abgeändert hat. Insbesondere ergibt sich bei $d=c$ das arithmetische Mittel aus a und b.

Damit haben wir eingesehen, dass das Argument für das Reflektionsprinzip eher fragwürdig und keinesfalls überzeugend war, weil es lediglich Aspekte der praktischen Rationalität berührt. Das Reflektionsprinzip ist mit dem Vorgang des „centering" (auch bekannt als „Iterationsprinzip"[214]) gleichzusetzen, wonach sich die jetzige Einschätzung eines Ereignisses als probabilistisch gewichtete Summe der zukünftigen

[39]Hätte anfänglich $a<b$ gegolten, so hätte der Buchmacher für das gleiche Resultat einfach nur die bedingte Wette an t kaufen und die Wette an t' verkaufen müssen.

[40]Etwa wenn man Informationen darüber erlangt, ob ein bestimmtes Ereignis tatsächlich eingetreten ist.

ergeben soll. Mit Hilfe des Prinzips kann man das elegant herleiten:

$$P(A) = P(A \cap (\cup_{i=1,\cdots,n}\{p(A) = x_i\})) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap \{p(A) = x_i\}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A|p(A) = x_i)P(p(A) = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(p(A) = x_i).$$

Ob es eine sinnvolle Anwendung des Centerings gibt, werden wir in Kapitel 5 Abschnitt 3 diskutieren, wo diese Forderung in entscheidungstheoretische Modelle integriert wird. Man mag dem Reflektionsprinzip noch zu Gute halten, dass hinter dem formulierten Gedanken die Intuition steckt, dass einem bestimmte Urteile der Vergangenheit naiv vorkommen müssen, da man ja ständig dazulernt.

4.2 Die Self-Sampling-Assumption

Die bayesianische Epistemologie stellt gegenwärtig eine der einflussreichsten Strömungen innerhalb der allgemeinen Erkenntnistheorie dar und wird sogar von bekannten Referenzen wie der Stanford Encyclopedia of Philosophy als eine der vielversprechendsten neueren Entwicklungen der Epistemologie angesehen. Trotz dieser bestehenden Euphorie gibt es gewisse Auswüchse dieser Erkenntnismethodik, die einen, vorsichtig formuliert, etwas stutzig machen müssen. Dazu zählt das sogenannte „Weltuntergangsargument" (doomsday argument), welches in zwei Varianten existiert: einerseits in der von Richard Gott [86] und H. B. Nielsen [163], andererseits in der von Carter [33] und Leslie[41] [136]. Ersteres basiert auf dem „Delta-t-Argument", wohingegen Letzteres expliziten Gebrauch von der Bayeskonditionalisierung und der „self-sampling assumption"(SSA) macht, um seine Schlussfolgerungen zu treffen. Ihre Gemeinsamkeit liegt in dem Versuch, Aussagen über Ereignisse von katastrophalem Ausmaß zu machen, was jedoch unter anderem zu stark kontraintuitiven Voraussagen führt. Wir werden nun beide Argumentationen rekapitulieren und dann untersuchen, was die Quellen der Prognosen sind. Nachdem diese identifiziert wurden, wird die Frage nach deren berechtigtem Einsatz gestellt.

4.2.1 Das Weltuntergangsargument nach Richard Gott und H. B. Nielsen

Zunächst wollen wir uns mit dem Weltuntergangsargument von Richard Gott und H. B. Nielsen beschäftigen und unter anderem bekannte Einwände wiedergeben. Bei diesem „legitimiert" die bisherige Dauer eines Ereignisses sein weiteres Bestehen. Das dabei eingesetzte Delta-t-Argument vollzieht sich in mehreren Schritten. Zuerst wird angenommen, dass die zeitliche Lokalisierung des Beobachters eine zufällige Stelle innerhalb der Existenzdauer eines bestimmten Ereignisses darstellt. Dann befindet sich nämlich der Beobachter mit der Wahrscheinlichkeit p innerhalb des Zeitintervalls I, das als Länge den p-ten Bruchteil der Gesamtdauer hat und symmetrisch in dieser positioniert ist. Wenn jetzt t_0 den Beginn des Ereignisses und t_1 den Zeitpunkt der Beobachtung darstellt, dann kann man sich überlegen, dass in den Extremfällen t_1 entweder am linken oder rechten Rand des Intervalls I situiert ist. Wenn man sich etwa am linken Rand befindet, so ist bereits der Bruchteil $(1-p)/2$ der Gesamtdauer vergangen und es liegt noch das $(1+p)/(1-p)$ Vielfache der Dauer $t_1 - t_0$ vor einem, was dann eine obere Grenze für die verbleibende Existenzdauer des Ereignisses liefert. Analog erhält man als untere Grenze $((1-p)/(1+p))(t_1-t_0)$. Damit beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass das fragliche Ereignis noch mindestens $((1-p)/(1+p))(t_1-t_0)$ und höchstens $((1+p)/(1-p))(t_1-t_0)$ andauert, genau p, was uns bei einem p nahe eins zu der Schlussfolgerung veranlasst, dass nach der weiteren Zeitdauer von $((1+p)/(1-p))(t_1-t_0)$ das Ereignis verlässlich beendet sein

[41] Es werden jeweils zwei Personen genannt, da ihnen die Entdeckung unabhängig voneinander zugeschrieben wird.

wird.
Diese Vorgehensweise ist denkbar einfach und lässt sich eigentlich auf beliebige Ereignisse wie etwa die Existenz der Menschheit anwenden, jedoch nennt Richard Gott selbst einige Einschränkungen. Beispielsweise dürfe man das Argument nicht auf einer Hochzeit fünf Minuten nach dem Ja-Wort anwenden, um auf die baldige Scheidung zu folgern, da man in diesem Fall keinen zufälligen Beobachter exemplifiziert, sondern extra zu der Hochzeit gekommen ist, um die Trauung zu beobachten. Außerdem sei diese Art des Räsonierens nicht zulässig, wenn man sie statt auf das Ende der Menschheit auf das Ende der Existenz des Universums anwendet. Der Grund liegt darin, dass Menschen vermutlich nicht seit Anbeginn der Zeit existieren; deshalb kann kein Mensch von sich behaupten, er existiere zu einem aus der Geschichte des Universums zufällig ausgewählten Zeitpunkt[42]. Nichtsdestotrotz meint Richard Gott, dass diese Methodik wertvolle Dienste vor allem dann leistet, wenn keinerlei empirische Daten verfügbar sind oder kein Vorwissen eingehen kann.

Das Delta-t-Argument zog einiges Interesse auf sich und ging zum Beispiel auch bei der Beurteilung von Sagan, einem der Vordenker bezüglich der Besiedelung anderer Planeten durch Menschen [186], ein, ob wir realistisch davon ausgehen können, dass die Menschheit lange genug existiert, um die dafür notwendige Technologie bereitzustellen. Zudem bemerkt Richard Gott, dass er die Existenzdauer der Sowjetunion im Jahr 1969 korrekt durch eine Schätzung mittels eines $0,95$-Konfidenzintervalls erfassen hätte können[43]. Ein solches Konfidenzintervall entspricht den Skalierungsfaktoren $1/39$ beziehungsweise 39 für die bisher vergangene Dauer. Allerdings ist zu bemerken, dass korrekte Voraussagen in Einzelfällen keinesfalls das Argument als solches legitimieren können und insofern soll die Erwähnung dieser Tatsache nur eine Randnotiz darstellen. Gerade wenn es sich um ein Ereignis wie das Bestehen der Sowjetunion handelt, kann man durch mannigfaltige Überlegungen und Theorien schon gewisse Priorwahrscheinlichkeiten aufbauen. Wie bereits erwähnt wurde, können Vorkenntnisse nicht sinnvoll in das Argument integriert werden, weshalb Fragestellungen, die auch noch anderweitig untersucht und erforscht werden können, eigentlich von dieser Methodik ausgeschlossen sein sollten. Damit hat das Argument einen doch ziemlich eingeschränkten Anwendungsbereich.
In den Fällen, wo es anwendbar ist, wird das Indifferenzprinzip ausgenutzt. Nach dem Bertrand Paradox stellt sich wiederum die Frage, warum die Gleichverteilung auf den Zeitpunkten und nicht etwa ihren Quadratwurzeln anzusetzen sei. Die Antwort von Richard Gott darauf ist, dass die Zeitpunkte selber besonders ausgezeichnet seien, was nachvollziehbar ist. Aber das Indifferenzprinzip ist immer nur eine Rationalitätsnorm bezüglich eines Kenntnisstandes; eine zusätzliche Anhäufung von Wissen ist einer willkürlichen Anwendung vorzuziehen.

[42]Eine Überzeugung bezüglich eines Anfangs der Zeit wies schon Kant als widersprüchlich aus. Wenn man andernfalls davon ausgeht, dass die Zeit keinen Beginn hatte, so lässt sich die beschriebene Argumentation bei einem unendlichen Zeitintervall gar nicht durchführen. In jedem Fall ist also die Anwendung des Delta-t-Arguments auf die Existenz des Universums unzulässig.

[43]Damals fragte er sich danach, ohne das Argument zu kennen.

Wenn ein Mensch das Argument zum ersten Mal in Erfahrung bringt, mag es ihm eine sofortige Anwendung erlauben, da man dann annehmen kann, dass sich der Zeitpunkt der Überlegung an einer zufälligen Stelle innerhalb der Existenzdauer des Ereignisses befindet. Was geschieht aber, nachdem es bekannt ist? Er weiß nun, dass man, abhängig vom Zeitpunkt der Prognose, ein unterschiedliches Konfidenzintervall erhält, womit nicht mehr sichergestellt werden kann, dass uniform aus der Existenzdauer ein Zeitpunkt ausgewählt wird. Demnach kann das Argument nur von Menschen angewendet werden, die ganz zufällig von ihm erfahren. Weiterhin ist festzustellen, dass zwei Beobachter, welche die Kalkulation für das gleiche Ereignis zu unterschiedlichen Zeitpunkten machen, zu verschiedenen Konfidenzintervallen gelangen. Dies ist insofern fragwürdig, sogar inkonsistent, als dass beiden die gleichen Informationen bezüglich des Ereignisses zur Verfügung stehen. Wieso sollten sich dann ihre Schlussfolgerungen unterscheiden?
Das Delta-t-Argument liefert aufgrund des Prinzips der Indifferenz für das Konfidenzintervall Grenzen, welche direkt proportional zu der bisherigen Existenzdauer sind. Damit wird tatsächlich eine Uniformität kodiert: Die restliche Dauer eines Ereignisses sollte in einer vergleichbaren Größenordnung wie die bisherige Existenz liegen. Diese Art Prognosen aufzustellen exemplifiziert die einfachste Form induktiven Denkens. Allerdings können gerade Abnutzungserscheinungen, nach welchen sich die weitere Existenzdauer zur bisherigen etwa annähernd indirekt proportional verhält, nicht modelliert werden, womit diese dann ebenfalls zu den Ausnahmen zählen. Insofern lässt sich das Argument nur auf Sachverhalte anwenden, von denen man schon eine gewisse Uniformität vermutet; dieser Umstand weist dann aber das Argument auf dieser Ebene als zirkulär aus.

Damit können wir festhalten, dass das Weltuntergangsargument nach Richard Gott und H. B. Nielsen nicht nur einen sehr eingeschränkten Anwendungsbereich hat, sondern auch einigen Willkürlichkeiten bei einer erneuten Anwendung ausgesetzt ist. In der Literatur wird es bei weitem nicht so ernst genommen wie die andere Version des Weltuntergangsarguments, denn gerade für Bayesianisten ist die fehlende Integrierbarkeit von Priorwahrscheinlichkeiten ein Ausschlusskriterium.

4.2.2 Das Weltuntergangsargument nach Carter und Leslie

Bei der Variante des Weltuntergangsarguments von Carter und Leslie wird in einem bayesianischen Rahmen, also bei explizitem Einbezug von Priorwahrscheinlichkeiten, unter Verwendung der sogenannten Self-Sampling-Assumption gefolgert. Zur Erläuterung des Arguments gehen wir der Einfachheit halber davon aus, dass nur zwei komplementäre Szenarios zu betrachten sind, nämlich ob der Weltuntergang unmittelbar bevorsteht (Hypothese 1, H_1) oder erst deutlich später eintrifft (Hypothese 2, H_2)[44]. Für diese werden Initialbewertungen $P(H_1)$ und $P(H_2) = 1 - P(H_1)$

[44]Andernfalls müsste man bei der jetzt folgenden Bayeskonditionalisierung noch in alle anderen Alternativen aufspalten, was aber insofern keinen Unterschied macht, als dass bei allen Alternativ-

erstellt, die viele Dinge wie etwa gegenwärtige Konfliktsituationen oder die Möglichkeit einer Supernova in unserem Sonnensystem berücksichtigen. Was aber hierbei nicht berücksichtigt wurde, ist die Information R, dass die Person, welche die Überlegungen angestellt hat, einen bestimmten Geburtsrang in der Menschheit hat. Dies ist von Bedeutung, da die jeweiligen Hypothesen H_1 und H_2 Aussagen über die Anzahl der jemals existierenden Menschen machen[45] [46]. Nach der Self-Sampling-Assumption[47] sollte der Beobachter so schließen, als sei er zufällig aus allen möglichen Beobachtern ausgewählt worden. Im Weltuntergangsargument wird dies dadurch motiviert, dass der Beobachter seine eigene Geburt nicht beeinflussen konnte. Formal bedeutet dies eine Gleichverteilung auf allen Menschen, welche unter den jeweiligen Hypothesen postuliert werden. Damit sich dies wirklich so einfach vollzieht, muss man sich eine kontrafaktische Situation vorstellen, in welcher das epistemische Subjekt keinen Grund hat, einen bestimmten Menschen zu bevorzugen, was bei einer realitätsnahen Anwendung nicht der Fall wäre; wir wollen jedoch illustrieren, welche Folgerungen man aus dem Argument prinzipiell ableiten kann. Nach der Self-Sampling-Assumption ist unter H_1 die Wahrscheinlichkeit, den betreffenden Geburtsrang zu haben, $P(R|H_1)$ weitaus höher als diejenige unter H_2, also $P(R|H_2)$. Wenn man nun R mit Hilfe der Bayeskonditionierung integriert, ergibt sich

$$P(H_1|R) = \frac{P(R|H_1)P(H_1)}{P(R|H_1)P(H_1) + P(R|H_2)P(H_2)} = \left(1 + \frac{P(R|H_2)P(H_2)}{P(R|H_1)P(H_1)}\right)^{-1}.$$

$P(H_1|R)$ wird groß, wenn $P(R|H_2)/P(R|H_1)$ sehr klein ist, was bei einer Hypothese H_2 erreicht wird, welche die Existenz von sehr vielen weiteren Menschen in Aussicht stellt, da dann die Wahrscheinlichkeit des eigenen Geburtsranges verschwindend gering ist. Demnach sollte man etwa bei $P(H_2) = P(H_1)$ der Überzeugung sein, dass der Weltuntergang unmittelbar bevorsteht, was absurd erscheinen mag.

Bevor wir nun die drohende Gefahr des Weltuntergangs genauer diskutieren, sei noch erwähnt, dass obige Art zu schließen, gleichzeitige Anwendung der Formel von Bayes und der Self-Sampling-Assumption, auch bei der Anwendung auf andere Fragestellungen stark kontraintuitive Schlussfolgerungen liefert. Einige werden in [23] erwähnt, wobei der skurrilste Fall wohl das „Adam and Eve Experiment"

hypothesen mehr potentielle Beobachter als unter H_1 existieren. Warum diese Anzahl so wichtig ist, wird gleich erläutert.

[45] Das ist das, was mit „Weltuntergang" wirklich gemeint ist: eine Begrenzung der Anzahl aller jemals existierenden Menschen. Insofern sollten wir bei H_1 korrekter davon sprechen, dass kein Mensch mehr geboren wird; allerdings hat sich in der Literatur die Bezeichnung vom Weltuntergang eingebürgert, da erstens ein Weltuntergang im üblichen Sinne impliziert, dass keine weiteren Menschen mehr existieren werden, und zweitens das Etikett „Weltuntergang" sehr provokativ und aufsehenerregend ist. Damit würden Meteoriteneinschläge, welche die Erde unbewohnbar machen, nicht als Weltuntergang zählen, falls sich die Menschen auf andere Planeten retten können.

[46] Zudem macht das Weltuntergangsargument nur Aussagen über Geburten, aber nicht über einzelne Lebensdauern. Demnach muss eine solche Beschränkung nicht auf das abrupte Ende der Menschheit folgern lassen, da es ja denkbar ist, dass Menschen bald aufgrund einer revolutionären lebensverlängernden Technologie mehrere hundert Jahre alt werden können.

[47] Diese Annahme ist äquivalent zu Vilenkins [235] „principle of mediocrity", wenn man es auf Individuen statt Zivilisationen anwendet.

darstellt. Das Szenario besteht in der Annahme: Für Adam und Eva führe allein die Zeugung eines Kindes, nicht aber unzüchtiges Verhalten an sich, zur Verbannung aus dem Garten Eden und zu der Entstehung der restlichen Menschheit. Da sie noch keine Kenntnisse über Menstruationszyklen oder Verhütungsmechanismen hatten, verhielten sie sich bis jetzt sittenkonform. Eines Tages zeigt sich jedoch die berüchtigte Schlange, welche meint, dass Adam und Eva gefahrlos ihren Neigungen nachgehen könnten. Auf die Frage, woher die Schlange denn wisse, dass sie kein Kind zeugen würden, antwortet sie, dass sie ein Experte in bayesianischer Epistemologie sei und sie ihnen erklären könne, weshalb das extrem unwahrscheinlich sei. Dabei legt sie ihnen ein angepasstes Weltuntergangsargument dar. Die komplementären Hypothesen bestehen aus der alleinigen Existenz von Adam und Eva für alle Zeiten beziehungsweise der Entstehung der restlichen Menschheit (etwa bis zum heutigen Tag). Ihre Priorwahrscheinlichkeiten seien in Abwesenheit irgendwelchen Wissens uniform. Dann ergibt sich aus der Self-Sampling-Assumption und der Bayeskonditionierung, dass die Zeugung eines Kindes (was bezüglich der Beobachterzahl einem zeitlich weit entfernten Weltuntergang entspricht) allein durch den Umstand, dass es sich bei Adam und Eva um die ersten Menschen handelt, eine zu vernachlässigende Wahrscheinlichkeit hat.

Den Platz des epistemischen Subjekts in der Menschheitsgeschichte überhaupt als Indiz für Folgerungen bezüglich des drohenden Weltuntergangs zu verwenden, ist (prima facie) doch etwas willkürlich. Die gerade präsentierte analoge Problemstellung des „Adam-und-Eva-Experiments" wird oft als Anlass eines Einwandes gegen die Gültigkeit des Weltuntergangsargumentes verwendet: Wenn schon die Neanderthaler als eine der ersten existierenden Menschengruppen über die notwendige intellektuelle Kapazität verfügt hätten, die bayesianische Epistemologie anzuwenden, wären sie bezüglich eines unmittelbaren Weltuntergangs falsch gelegen. Aber nicht nur sie. Denn jeder Mensch, der bis zum heutigen Tag geboren wurde, hätte das Argument für sich durchgehen können und hätte sich ebenfalls geirrt. Das ist gerade das kontraintuitive Resultat des Weltuntergangsarguments: Jeder Mensch kann für sich folgern, dass er gewissermaßen einer der letzten lebenden Menschen sein wird. Da die Voraussage an sich probabilistischer Natur ist, darf man nicht aus einer mehrfach falschen Prognose folgern, dass das Argument nicht gültig sei; allerdings kann es die Vermutung bestärken, dass ein bestimmter Teil des Arguments unzulässig ist.

Da wohl mit Recht behauptet werden kann, dass das Weltuntergangsargument fragwürdige und unintuitive Schlussfolgerungen nahelegt, wurden gewisse Argumente erdacht, um es zu entschärfen. Wir wollen nun zwei der elaboriertesten darstellen und bewerten, inwiefern sie der eigentlichen Problematik tatsächlich auf den Grund gehen.

4.2.2.1 Die Self-Indication-Assumption

Eine Vermeidung der Folgerungen des Weltuntergangsargumentes vollzieht sich mit Hilfe der sogenannten „self-indication assumption” (SIA), welche von Dieks [50] eingeführt wurde. Ihr zufolge sollte die Wahrscheinlichkeit einer Hypothese als zusätzlichen Proportionalitätsfaktor die Anzahl der vorhandenen Beobachter haben. Wie wir bereits sahen, werden durch die Self-Sampling-Assumption Szenarien bevorzugt, in denen möglichst wenige Beobachter existieren, weshalb man vermuten kann, dass sie Self-Indication-Assumption die Self-Sampling-Assumption in gewisser Weise neutralisiert. Dies kann man sich nun konkret rechnerisch klarmachen[48].
Es seien $P'(H_1)$ und $P'(H_2)$ die naiven Wahrscheinlichkeitsbewertungen der Hypothesen beziehungsweise N_1 und N_2 die zugehörigen prognostizierten Beobachterzahlen. Nach der Self-Indication-Assumption muss für die modifizierten Initialwahrscheinlichkeiten $P(H_1)$ und $P(H_2)$ gelten, dass sie sich wie $(N_1P'(H_1))/(N_2P'(H_2))$ verhalten. Die Normierung ergibt dann mit $c = (N_1P'(H_1) + N_2P'(H_2))$: $P(H_1) = (N_1/c)P'(H_1)$, $P(H_2) = (N_2/c)P'(H_2)$. Führt man jetzt die Bayeskonditionierung mit den abgeänderten Wahrscheinlichkeiten durch, so erhält man

$$P(H_1|R) = \frac{P(R|H_1)P(H_1)}{(P(R|H_1)P(H_1) + P(R|H_2)P(H_2)} =$$

$$= \frac{(1/N_1)N_1P'(H_1)}{(1/N_1)N_1P'(H_1) + (1/N_2)N_2P'(H_2)} = P'(H_1),$$

was man gemeinhin als die vernünftige Wahrscheinlichkeit in diesem Szenario einstuft.
Um die fragwürdigen Resultate des Weltuntergangsarguments zu vermeiden, muss man also die Self-Sampling-Assumption nicht verwerfen, da sie bei gleichzeitiger Akzeptanz der Self-Indication-Assumption die intuitiv richtige Lösung liefert. Dies erscheint wünschenswert, da Erstere, wie wir später beim „Gedankenexperiment des Gewölbes” sehen werden, einen sinnvollen Zweck erfüllt. Allerdings ist zu fragen, welche Gründe unabhängig von der Balancierung als reinem Rechentrick für die Self-Indication-Assumption sprechen.

Tatsächlich gibt es aber keinen überzeugenden Grund, der sonst noch für die Self-Indication-Assumption spräche. Vielmehr hat sie selbst einen zweifelhaften Status, wie der von Bostrom in [22] erdachte Fall des „dreisten Philosophen” (presumptuous philosopher) zeigt. Man stelle sich vor, dass in der Zukunft Physiker bei der Suche nach der „theory of everything” mit Hilfe von „Superdupersymmetrie” so weit fortgeschritten sind, dass es nur noch zwei plausible Alternativen gibt, nämlich Theorie $T1$ und Theorie $T2$. $T2$ zufolge gibt es ein weitaus größeres Universum mit einer dazugehörigen weitaus größeren Anzahl von Beobachtern als es nach $T1$ der Fall wäre[49] und allein aus Superdupersymmetrieüberlegungen lässt sich kein Grund

[48] Die erstmalige formelle Ausarbeitung erfolgte unabhängig durch Kopf, Krtous, Page [126] und Bartha, Hitchcock [10].
[49] Bostrom verwendet zu illustrativen Zwecken den Proportionalitätsfaktor eine Trillion.

angeben, der eine bestimmte Theorie bevorzugt. Dementsprechend bereiten Physiker ein aufwändiges und enorm teures Experiment vor, das schließlich eine der beiden Theorien falsifizieren wird. Dann begegnet ihnen allerdings der Presumptuous Philosopher, der ihnen mitteilt, dass das Experiment eigentlich unnötig sei, da $T1$ aufgrund der Self-Indication-Assumption genau eine Trillion mal unwahrscheinlicher als $T2$ ist. Damit sei die Self-Indication-Assumption zu verwerfen, da sie zu absurden Schlussfolgerungen führt und es im Allgemeinen zweifelhaft ist, ob man weitreichende Behauptungen über die Beschaffenheit der realen Welt a priori anstellen kann.

Olum, der stellvertretend für Dieks auf diese Einwände reagiert, erkennt grundsätzlich die Fragwürdigkeit der obigen Schlussfolgerung an, weshalb er sich in [166] ein Gegenargument ausgedacht hat, um die Self-Indication-Assumption zu retten. Dieses zielt im Wesentlichen darauf ab, dass für die Initialwahrscheinlichkeiten von $T1$ und $T2$ ein wichtiger Punkt übersehen wurde, nämlich dass sich die Wahrscheinlichkeit von Universen indirekt proportional zu ihrer Größe verhält. Er begründet das damit, dass dies vollkommen analog zu dem folgenden Fall sei: Wenn man einem Mann nachts auf der Straße begegnet, der sich einen Dollar leihen möchte und als Ausgleich verspricht, am nächsten Tag an einem vereinbarten Treffpunkt einen bestimmten Geldbetrag als Gegenleistung zurückzugeben, so sei das umso unglaubwürdiger, je größer dieser Betrag ist[50].

Dieser Gedankengang ist wohl korrekt für das konkrete Szenario mit dem Mann, den man nachts in einer Gasse antrifft, aber Bostrom führt in [24] korrekt auf, warum das hier nicht helfen kann. Erstens dürfe man hier nicht Ockham's Rasiermesser als Argument für kleinere Universen hervorholen, da sich dieses nur sinnvoll auf die Beschaffenheit von Theorien, aber nicht auf die Größe spezieller Parameter der theoretischen Inhalte anwenden lässt. Zweitens ist es durchaus üblich, dass gewisse Dinge nur in sehr großer Ausführung vorkommen, und vor allem in der Kosmologie ist materielle oder räumliche Sparsamkeit kein Konzept, das von bestehenden Theorien nutzenbringend angewendet wird; man ist sich stattdessen einig, dass der Kosmos immens groß sein muss. Drittens sind im Beispiel des Presumptuous Philosopher schon alle beobachterunabhängigen Erwägungen bezüglich der Größe des Universums eingeflossen, die dann den Schluss nahelegten, dass $T1$ und $T2$ gleich wahrscheinlich seien; damit stellt der Fall gerade ein Versuchsfeld dar, um die Plausibilität der Self-Indication-Assumption zu testen. Letztendlich muss auch noch bemerkt werden, dass der Vorschlag, eine bezüglich der Größe des Universums modifizierte Anfangswahrscheinlichkeit zu betrachten, nur funktioniert, weil im Presumptuous Philosopher für $T1$ und $T2$ implizit eine gleiche Beobachterdichte vorausgesetzt wurde. Allerdings könnte man den Presumptuous Philosopher geeignet bezüglich der Beobachterdichte abändern, um zu den gleichen absurden Folgerungen zu gelangen: Wenn die Universen in $T1$ und $T2$ solche Beobachterdichten haben, dass sie tatsächlich die gleiche Anzahl an Beobachtern besitzen, würde der Presumptuous Philosopher einfach mit

[50] Zum Beispiel könne man dann nur mit einer geringen Wahrscheinlichkeit mit einer Million rechnen.

dem Argument der Größe der Universen kommen.

Es muss kritisch bemerkt werden, dass die Diskussion über die Self-Indication-Assumption selber schon leicht lächerlich wirkte: Die Self-Indication-Assumption wurde als Gegenmittel zur Self-Sampling-Assumption erdacht, aber konsequenterweise musste man wieder ein Gegenmittel zu Ersterer ersinnen, wobei dieses aber den gleichen Vorbehalten wie die Self-Indication-Assumption ausgesetzt war und die Lage nicht im Geringsten verbesserte. Die Argumentation, aus scheinbar(!) lächerlichen Implikationen eines Prinzips dessen Untauglichkeit abzuleiten, funktioniert streng genommen nicht[51]. Vielmehr geht es darum abzuklären, welche Gründe man hat, ein bestimmtes Prinzip zu postulieren. Bei der Self-Indication-Assumption sind solche neben der Legitimierung eines Rechentricks nicht vorhanden.

4.2.2.2 Das Dornröschen-Problem

Dieks akzeptiert diese Kritik. In seinem zweiten Beitrag zu der Problematik [51] schafft er es, die Verwirrung um das Weltuntergangsargument aufzulösen, ohne dabei die Self-Indication-Assumption einzusetzen. Seine Inspiration für die Lösung holt er aus dem sogenannten „Dornröschen-Problem" (sleeping beauty problem)[52]. Das Problem ist dieses:

Einer Probandin werden am Sonntag schlaffördernde Substanzen verabreicht, die sie eigentlich bis Mittwoch schlafen ließen, wenn sie nicht geweckt würde[53]. In der Nacht von Montag auf Dienstag wird eine faire Münze geworfen, deren Resultat bestimmt, ob sie am Dienstag geweckt wird (etwa bei Zahl) oder nicht; falls sie am Dienstag erwacht, wird sie befragt, welche Wahrscheinlichkeiten sie den Wurfresultaten zuweise. Auf jeden Fall wird sie aber am Montag geweckt und ebenfalls direkt nach dem Aufwachen nach den Wahrscheinlichkeiten gefragt; danach wird ihr gesagt, dass Montag ist und sie erneut ihre Wahrscheinlichkeiten mitteilen soll. Offensichtlich bestünde die angemessene Antwort am Montag in der Gleichverteilung und trivialen Wahrscheinlichkeiten am Dienstag. Die Brisanz liegt nun darin, dass das Schlafmittel gewisse Nebenwirkungen hat, welche sie sich nicht daran erinnern lassen, wie oft sie während des Experimentes schon geweckt wurde, so dass sie unmittelbar nach dem Aufwachen nie das Datum kennt. Der Ablauf des Experiments ist ihr bekannt. Was sollte sie dann jeweils bezüglich Prior- und Posteriorwahrscheinlichkeiten antworten?
Wenn man unter Berücksichtigung des Principal Principle die Initialwahrscheinlichkeiten auf den Wurfresultaten uniform verteilt, so erhöht die Bayeskonditionalisie-

[51] Vielleicht hat der Presumptuous Philosopher ja Recht? Auch die Möglichkeit, dass wir Menschen auf einer „Kugel" leben, wurde im Mittelalter als lächerlich eingestuft.

[52] Dieses wurde von Elga [62] erdacht.

[53] Nach jedem Wecken bleibt die Wirkung der Substanzen, die zum Durchschlafen führen, erhalten, was bedeutet, dass sie nach einer kurzen Wachphase wieder einschläft.

rung auf die Information „Montag“ die Wahrscheinlichkeit für Kopf auf 2/3[54]. Dies steht aber in Diskrepanz zu einem ideal frequentistischen Szenario, in dem die relativen Häufigkeiten für Kopf und Zahl bei einer geraden Wochenzahl genau gleich sind[55]. Insofern ist diese Lösung nicht angemessen.
Vielmehr muss man modifizierte Initialwahrscheinlichkeiten betrachten. Dies steht nicht im Widerspruch zum Principal Principle: es sollte nur dann zur Geltung kommen und einem nahelegen, die objektiven Wahrscheinlichkeitswerte zu wählen, falls keine relevanten Extrainformationen verfügbar sind[56]. Solche sind hier aber vorhanden, was man sich wieder mittels des ideal frequentistischen Szenarios klarmachen kann: Nur in einem von drei Weckszenarien befindet man sich in einer Woche, in der Kopf fällt. Natürlich wird bei dem Münzwurf an sich kein Resultat bevorzugt, nur wird man eben doppelt so häufig bei Zahl gefragt, weshalb man hierfür eine höhere Wahrscheinlichkeit ansetzen muss und zwar genau 2/3[57]. Dies berücksichtigt die spezielle Rolle, in der sich das epistemische Subjekt befindet. Dann ergibt nämlich die Rechnung mit den naheliegenden Abkürzungen für die Ereignisse:

$$P(K|M) = \frac{P(K)P(M|K)}{P(K)P(M|K) + P(Z)P(M|Z)} =$$

$$= (1/3)/(1/3 + 2/3 * 1/2) = 1/2 = P(Z|M).$$

Damit ist dann ein kohärentes und vernünftiges Wahrscheinlichkeitsmodell etabliert worden.

Analog müssen auch beim Weltuntergangsargument die Initialwahrscheinlichkeiten angepasst werden; nun nicht aufgrund der Self-Indication-Assumption, sondern weil man die Hypothesen H_1 und H_2 nichtindexikalisch bezüglich des Geburtsrangs formulieren muss. In der Standardpräsentation des Weltuntergangsarguments werden die Hypothesen so verstanden, dass zu dem größten gegenwärtig existierenden Geburtsrang eine unterschiedliche Anzahl an Menschen noch hinzukommt. Damit ist aber sowohl unter H_1 als auch H_2 der größte Geburtsrang bekannt, womit die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(R|H_1)$ und $P(R|H_2)$ nicht unterschiedlich, sondern gleich sind; dementsprechend hat die Bayeskonditionierung auf R gar keinen Einfluss. Das Weltuntergangsargument in seiner intendierten Form kann nur funktionieren, wenn man die Hypothesen nichtindexikalisch formuliert, also wenn sie einfach eine bestimmte Zahl an existierenden Menschen postulieren. Da man dann potentiell selber einen Geburtsrang R haben könnte, der $H1$ unmittelbar falsifiziert, muss

[54] Unter Verwendung der Abkürzungen K für Kopf, Z für Zahl und M für Montag ergibt sich: $P(K|M) = (P(K)P(M|K))/(P(K)P(M|K) + P(Z)P(M|Z)) = 1/(1 + 1/2) = 2/3$.

[55] Man stelle sich einfach vor, das Experiment werde mehrmals wiederholt.

[56] Obwohl in verschiedenen Situationen darüber gestritten wird, wann etwas eine relevante Information darstellt ([205], [130], [16], [94], [96], [228], [223], [102], [18], [225], [244], [21]), ist der vorliegende Fall aufgrund seines Aufbaus klar.

[57] Hitchcock [100] wählt stattdessen die Vorgehensweise eines diachronen Dutch-Book-Arguments, da er Bedenken gegen die gerade gegebene Begründung hat. Allerdings sind diese, wie Dieks korrekt bemerkt, unzulässig. Zudem kommt Hitchcock ebenfalls auf die Wahrscheinlichkeit von 2/3 für Zahl.

der Umstand, dass der größte Geburtsrang nicht bekannt ist, bei den Initialwahrscheinlichkeiten für H_1 und H_2 auf folgende Weise Eingang finden (exemplarisch dargestellt für H_1; das Ereignis, dass man einen mit $H1$ kompatiblen Geburtsrang hat, sei mit R_1 bezeichnet):

$$P(H_1) = P(H_1|R_1)P(R_1) + P(H_1|\overline{R_1})P(\overline{R_1}).$$

Unter $\overline{R_1}$ wird H_1 direkt falsifiziert, weshalb $P(H_1|\overline{R_1}) = 0$ gilt. $P(H_1|R_1)$ ist nun die Wahrscheinlichkeit, die man vernünftigerweise für den nahen Weltuntergang ansetzen würde, p_1[58]. Der Faktor $P(R_1)$ wird als $P(H_1) + (N_1/N_2)P(H_2)$ berechnet, was der folgenden Überlegung geschuldet ist: Falls H_1 korrekt ist, hat man selber automatisch einen Geburtsrang, der kleiner oder gleich dem größten unter H_1 ist; falls H_2 zutrifft, ergibt sich mit Hilfe der Self-Sampling-Assumption, dass R_1 nur für den Bruchteil (N_1/N_2) aller möglichen Beobachter gilt. Löst man nun die sich ergebende Gleichung nach $P(H_1)$ auf, so ergibt sich:

$$P(H_1) = \frac{N_1 p_1}{N_1 p_1 + N_2 p_2}.$$

Analog für $P(H_2)$ gilt dann $P(H_2) = (N_2 p_2)(N_1 p_1 + N_2 p_2)^{-1}$. Wendet man nun auf $P(H_1)$ und $P(H_2)$ die Bayeskonditionierung des Weltuntergangsarguments an, so erhält man wieder p_1 und p_2 (erneut exemplarisch für H_1 durchgeführt):

$$P(H_1|R) = \frac{P(R|H_1)P(H_1)}{P(R|H_1)P(H_1) + P(R|H_2)P(H_2)} = \frac{(1/N_1)N_1 p_1}{(1/N_1)N_1 p_1 + (1/N_2)N_2 p_2} = p_1.$$

Damit lag das Problem des Weltuntergangsarguments tatsächlich in einer ungenauen Formulierung der Hypothesen. Es sei bemerkt, dass die modifizierten Initialwahrscheinlichkeiten die gleichen sind, die man durch die Self-Indication-Assumption erhält, allerdings wurden sie nun besser begründet.

4.2.2.3 Gedankenexperimente: das Gewölbe und der Inkubator

Damit wurde also das Weltuntergangsargument von Dieks entschärft. Allerdings gibt es ein weiteres Problem, das von der Anwendung der Self-Sampling-Assumption stammt: der „Inkubator" (the incubator)[59]. Er wurde eigentlich zur Begründung der Validität des Weltuntergangsarguments ersonnen, jedoch gibt Bostrom selber in seinem Buch [23] zu, dass es signifikante Unterschiede gibt; insbesondere hat man beim Inkubator ein viel besseres Verständnis von den Initialwahrscheinlichkeiten. Insofern ist er getrennt zu behandeln.

Bei dem Inkubator handelt es sich um ein abstruses Science-Fiction-Szenario. In vollkommener Dunkelheit gibt es zwei Zellen[60], wobei eine innen blau und die andere innen rot bemalt ist. Weiterhin sei es möglich, dass Menschen auf Knopfdruck

[58] p_2 ist dementsprechend die vernünftige Wahrscheinlichkeit für einen späteren Weltuntergang.

[59] Dieses Gedankenexperiment ist auch bekannt als „God's coin toss".

[60] Dieses Beispiel lässt sich problemlos auf mehr Zellen anpassen.

von einem Roboter erschaffen werden können, welche sofort voll ausgebildet sind[61]. Es werde eine faire Münze geworfen. Wenn die Münze nach dem Wurf Kopf zeigt, so werde nur ein Mensch in der roten Zelle geschaffen, andernfalls in beiden Zellen jeweils ein Mensch. Wenn man sich nun in der Situation einer dieser Menschen befände und über die ganze Prozedur Bescheid wüsste, welche Ansicht sollte man über den Ausgang des Münzwurfes bei vollständiger Dunkelheit beziehungsweise nach Beobachtung der Zellenfarbe mittels einer Lichtquelle haben[62]? Da man bei Dunkelheit nur weiß, dass die Münze fair ist, sollte man auch bezüglich des Ausgangs indifferent sein, also $P(K) = P(Z) = 1/2$ mit den üblichen Abkürzungen. Wenn jedoch das Licht angeht, erhält man eine Information, die in eine Bayeskonditionierung einbezogen werden kann. Befindet man sich in der blauen Zelle (formalisiert sei diese Information als B bezeichnet), kann eindeutig auf den Ausgang des Münzwurfes gefolgert werden. Demnach ist unter der Bedingung, dass man sich in einer blauen Zelle befindet, die Wahrscheinlichkeit für Kopf gleich null, was sich mit der Bayesformel als

$$P(K|B) = \frac{P(B|K)P(K)}{P(B|K)P(K) + P(B|Z)P(Z)} = 0/(0 + 1/2) = 0$$

schreibt. Hierbei wurde ausgenutzt, dass bei Kopf die blaue Zelle nicht besetzt wird und durch die Self-Sampling-Assumption die Wahrscheinlichkeit $P(B|Z)$ den Wert $1/2$ erhält. Befindet man sich aber in der roten Zelle (abgekürzt R), ergibt eine Bedingung auf diese Information mit der Bayesformel:

$$P(K|R) = \frac{P(R|K)P(K)}{P(R|K)P(K) + P(B|Z)P(Z)} = 1/(1 + 1/2) = 2/3.$$

Jetzt wurde ausgenutzt, dass bei Kopf nur die rote Zelle besetzt wird und nach der Self-Sampling-Assumption der Wahrscheinlichkeit $P(R|Z)$ der Wert $1/2$ zukommt. Das Ergebnis scheint aber absurd zu sein: die rote Zelle wird in jedem Fall besetzt; wie sollte man hieraus Hinweise über den Ausgang des Münzwurfes erhalten haben? Man kann unmittelbar auf die Idee kommen, den Abgleich zu der Lösung des Dornröschen-Problems zu suchen, jedoch hilft sie hier nicht. Eine Anpassung der Initialwahrscheinlichkeiten wie im Dornröschen-Problem verbietet sich, da man viel stärkere Gründe hat, sich bei den Initialwahrscheinlichkeiten indifferent zu zeigen: das gleiche epistemische Subjekt wird nicht potentiell mehrmals befragt. Da uns die Self-Sampling-Assumption zu dieser doch verwunderlichen Schlussfolgerung über den Münzwurf führte, gilt es, diese genauer zu betrachten. Um sie richtig zu motivieren, geben wir die Gründe, die Bostrom in seinem Buch [23] für sie nennt, wieder.

Er führt für die Self-Sampling-Assumption zwei Begründungen ins Feld: Erstens rette sie uns vor einer „methodologischen Verlegenheit" in den Wissenschaften und zweitens gebe es ein Gedankenexperiment, das „Gewölbe" (the dungeon) , welches zeige, dass man sie gerade bei solchen Problemstellungen wie dem Inkubator guten

[61] Damit ist gemeint, dass sie die Gestalt und kognitiven Fähigkeiten eines Erwachsenen besitzen.

[62] Bostrom zufolge werden alle Teilnehmer des Experiments getötet, nachdem sie ihre Vermutung abgegeben haben. Aus ethischen Gründen verzichten wir auf diese unnötige Grausamkeit.

Gewissens einsetzen dürfe.
Die Nützlichkeit der Self-Sampling-Assumption in den Wissenschaften zeige sich besonders in der Kosmologie, der Evolutionsbiologie, der Quantenmechanik und der Analyse von Straßenverkehr sowie thermodynamischen Problemstellungen. Bei Ersterer geht es unter anderem um die Beurteilung von „big cosmos theories": Da man vermutet, dass in einem genügend großen Kosmos jede mögliche Beobachtung gemacht werden kann, können verschiedene Big-Cosmos-Theorien nach empirischen Befunden gegeneinander abgewogen werden. Diese unter Kosmologen gängige Praxis sei ohne die Self-Sampling-Assumption kaum zu rechtfertigen. Demnach springe die Self-Sampling-Assumption in eine offene Bresche, die anderweitig schwer zu füllen sei. Zunächst ist zu bemerken, dass, selbst wenn die Self-Sampling-Assumption in bestimmten Problemfeldern gerechtfertigt anwendbar ist, damit nicht zwingend ihre Legitimation für alle denkbaren Fragestellungen folgt. Zudem kann die hier gegebene Art von Begründung nicht zählen, da von einem praktischen Einsatz auf eine philosophische Fundierung gefolgert wird. Die richtige Vorgehensweise ist aber genau entgegengesetzt: Nur mit einer ausreichenden philosophischen Begründung kann ein Prinzip berechtigt und nutzenbringend angewendet werden. Demnach gilt es, genauer zu untersuchen, inwiefern die Self-Sampling-Assumption angewendet werden darf, was uns zur zweiten Begründung überleitet.
Im Gedankenexperiment des Gewölbes besteht die gesamte Welt aus einem unterirdischem Gewölbe, in dem sich drei Zellen befinden. Von diesen sind zwei blau und eine rot außen angemalt. In jeder Zelle ist ein Mensch eingesperrt. Wenn die Insassen um die Beschaffenheit der Zellen wissen, was sollten sie bezüglich der Farbe *ihrer* Zelle glauben? Durch Anwendung der Self-Sampling-Assumption ergibt sich, dass man sich mit Wahrscheinlichkeit $2/3$ in einer blauen und mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ in einer roten Zelle wähnen sollte. Wenn man dies als Grund betrachtet, von einer blauen Zelle auszugehen, dann hat die Mehrheit der Zelleninsassen die richtige Vermutung[63]. Wenn man so möchte, kann man das „Recht haben" auch direkt als Gewinn einer entsprechenden Wette deuten.
Im Fall des Gewölbes ist die Argumentation von Bostrom korrekt: Als Insasse hat man weder eine Ahnung von der eigenen Position noch irgendeine Möglichkeit, an weitere klärende Informationen zu gelangen, weshalb man die Self-Sampling-Assumption anwenden sollte. Damit ist es nur vernünftig, wenn man aufgrund der Wahrscheinlichkeit von $2/3$ dazu neigt, sich in einer blauen Zelle zu wähnen. Wie man in die Zelle kam, spielt keinerlei Rolle, da man über diesen Mechanismus, sei er nun indeterministischer oder deterministischer Natur gewesen, nicht das geringste Wissen besitzt. Demnach kann die Self-Sampling-Assumption berechtigt auf derartige Fragestellungen angewendet werden.

Im Inkubator hat man intuitiv die Vermutung, dass man im Fall, wenn man sich in der roten Zelle befindet, keinerlei relevante Information bezüglich des Ausgangs des

[63] Oft wird dieses Beispiel mit einer roten und 999 blauen Zellen präsentiert, da damit dann unter Einbeziehung der korrespondierenden Wahrscheinlichkeiten $0,001$ und $0,999$ die Anzahl der korrekten Vermutungen noch größer ist.

Münzwurfes erhalten hat; allerdings überzeugt einen die Wahrscheinlichkeitstheorie vom Gegenteil. Wie ist dieser Diskrepanz beizukommen?
Bostrom selbst meint in seinem Buch „Anthropic Bias" [23], welches sich mit Observationsselektionseffekten beschäftigt, dass es legitim sei, wie oben beschrieben zu räsonieren, aber er bietet eine Alternative an: Er verstärkt die Self-Sampling-Assumption zu der „strong self-sampling assumption" (SSSA), welche zusätzlich indexikalische Informationen bei der Wahl der Referenzklasse einbezieht. Somit beinhalte die Referenzklasse nach Angehen des Lichts nur noch die rote Zelle bei Kopf und die rote Zelle bei Zahl, weshalb man auf 1/2 komme. Zur Modifizierung von Referenzklassen durch indexikalische Informationen meint er nur, dass sie nicht vollkommen willkürlich sei.
Dieser Lösungsvorschlag ist unbefriedigend. Erstens, weil er dem „deus ex machina" gleicht: Nachdem die Self-Sampling-Assumption im Buch ausführlich motiviert wurde, stellt man auf einmal fest, dass ein essentieller Aspekt bei der Formulierung vergessen wurde. Zudem betont Bostrom mehrfach, dass eine Sampling-Assumption weit mehr als eine Anwendung des Indifferenzprinzips darstelle. Das stimmt aber nicht. Er begründet seine Behauptung damit, dass man sich extra überlegen müsse, dass man selbst kein Stein sein kann[64], was eine Überlegung darstelle, die bei dem Indifferenzprinzip niemals gemacht würde. Allerdings versteht sich dies bei einer einigermaßen vernünftigen Anwendung des Indifferenzprinzips von selbst: Man muss sich natürlich überlegen, worauf das Prinzip anzuwenden ist. Hier fragt man sich, in welcher Position man sich befinden könnte; da dann weiterhin keine spezielle dieser Positionen ausgezeichnet ist, wird eine Gleichverteilung angesetzt[65]. Damit ist eine Sampling-Assumption einfach nur ein Spezialfall des Indifferenzprinzips. Zweitens, und das ist viel schwerwiegender, klärt er damit nicht auf, was bei dem Inkubator schief geht. Darüber hält er sich auffallend bedeckt und meint nur, seine Strong-Self-Sampling-Assumption stelle keine zwingende Forderung dar, sondern lediglich einen alternativen Grund, welcher einem erlaube, die Schlussweise des Inkubators zu *ignorieren*.
Doch was hat Bostrom übersehen? Das eigentliche Problem des Inkubators liegt darin, dass man nicht auf die folgende Art argumentieren darf: Man kann irgendwie ein wahrscheinlichkeitstheoretisches Modell für das Gedankenexperiment erstellen, und deshalb muss die Information, dass man sich in der roten Zelle befindet, Auswirkungen haben. Es muss genau umgekehrt sein: Nur wenn die Information probabilistisch relevant wäre, dürfte man ein wahrscheinlichkeitstheoretisches Modell erstellen. Wie wir bereits in Unterabschnitt 2.2 von Kapitel 3 sahen, können allerlei sonderbare

[64] Angenommen, das Szenario des Gewölbes wird dahingehend abgeändert, dass in der roten Zelle ein Stein platziert wird, dann darf man nicht so denken, als könnte man der Stein sein.

[65] Würden sich etwa im Gewölbe noch „posthumans" unter den Zelleninsassen befinden, so sind diese keinesfalls von der Gleichverteilung ausgeschlossen, solange man nicht weiß, ob man einer von ihnen ist (wenn zum Beispiel die am Experiment teilnehmenden Posthumans nur durch eine unnatürlich lange Lebenserwartung individuiert werden, was man aber in den Zellen nicht feststellen kann). Bostrom als Verfechter des Transhumanismus [25] suggeriert mit seiner Darstellung, dass sich Posthumans ebenso wenig in einer Referenzklasse mit gewöhnlichen Menschen befinden können, wie Menschen in eine Referenzklasse mit Steinen gehören.

Dinge bezüglich der Interpretation geschehen, wenn bei einer mathematischen Beschreibung nicht das Reinheitsprinzip beachtet wird: Eine Darstellung mittels Zahlen kann nur dann sinnvoll angewendet werden, wenn die Dinge, welche durch sie beschrieben werden, den gleichen Charakter haben. Dies ist aber hier nicht der Fall: Die möglichen Welten des Münzwurfes beschreiben objektive Möglichkeiten, also solche, die auch zu einem früheren Zeitpunkt bestanden; die möglichen Welten des Aufenthaltsortes dagegen lediglich rein epistemische[66]. Dieser Aspekt ist hier essentiell und darf bei einer Modellierung nicht vernachlässigt werden, da es sich um ein zweistufiges Zufallsexperiment handelt, welches eine zeitliche Struktur besitzt[67].
Unter Beachtung des Reinheitsprinzips wird auch deutlich, warum sich die Rationale der Self-Sampling-Assumption gerechtfertigt auf das Gewölbe anwenden lässt: *Alle* möglichen Welten haben hier den gleichen Status[68]. Dass Bostrom die beiden Gedankenexperimente, das Gewölbe und den Inkubator, präsentiert, ohne auf die bestehenden Unterschiede hinzuweisen, trägt nur zur Verwirrung bei.
Wird jedoch ein einheitliches wahrscheinlichkeitstheoretisches Modell erstellt, so ist eine Interpretation angebracht, bei welcher der Unterschied bezüglich der möglichen Welten nicht existiert. Anstatt davon auszugehen, dass Menschen auf Knopfdruck erschaffen werden können, werde nun der Inkubator so modifiziert, dass man ihn auch realistisch durchführen könnte. Einerseits gibt es wieder die rote und die blaue Zelle (beide leer), andererseits gibt es jedoch noch zwei andere Zellen, die jeweils mit einem epistemischen Subjekt besetzt sind, wobei eines von beiden ausgezeichnet ist. Die beiden Insassen werden in die farbigen Zellen, welche zunächst wieder verdunkelt sind, überführt, wobei der faire Münzwurf darüber entscheidet, ob das ausgezeichnete Subjekt garantiert in die rote Zelle kommt (Kopf) oder dies wiederum zufällig[69] geschieht (Zahl). Das ausgezeichnete Subjekt, welches über die Prozedur informiert ist, wird bei Dunkelheit und nach Angehen des Lichts nach seinen Wahrscheinlichkeiten gefragt. Hierbei sind dann alle Folgerungen, welche man aus dem wahrscheinlichkeitstheoretischen Modell ziehen kann, im Einklang mit der Intuition. Die Angemessenheit einer solchen Beschreibung hängt also davon ab, ob es einen

[66] Diese Behauptung setzt natürlich voraus, dass das Bewusstsein nicht unabhängig vom Körper existiert, womit das uralte Geist-Körper-Problem angesprochen wird. Wir entschließen uns hier für eine positivistische Anschauung, weil man keine Anhaltspunkte bezüglich einer körperlosen Existenz des Geistes hat.

[67] Grundsätzlich kann man auf die Idee kommen, Abstrakta soweit zu abstrahieren, bis sie gleichartig werden. Etwa kann die Gleichung $4 + 4 = 5 + 3$ darstellen, wie sich acht Äpfel regruppieren lassen. Nun kann man dies aber nicht für eine Mischung aus Äpfeln und Birnen ohne Verwirrung anwenden, da die Zahlen an sich keine Information darüber enthalten, ob sie einen Apfel oder eine Birne beschreiben. Nach dem Reinheitsprinzip bietet es sich dann an, die Gleichung im Bezug auf „Obst" zu interpretieren, was erreicht wird, indem man den Unterschied zwischen den beiden Obstarten einfach wegabstrahiert. Bei dem Inkubator darf der Unterschied, ob die mögliche Welt eine objektive oder rein epistemische Möglichkeit beschreibt, aber nicht wegabstrahiert werden, da er essentiell zur Beschreibung des zweistufigen Zufallsexperiments ist, welches eine zeitliche Struktur besitzt.

[68] Hier kann der Unterschied zwischen den möglichen Welten, falls er besteht, berechtigt wegabstrahiert werden, da das Szenario keine zeitliche Struktur besitzt.

[69] Das Wort „zufällig" soll hier völlige Ignoranz des Subjekts bezüglich des Mechanismus beschreiben.

solchen „Wartebereich" gibt.
Nachdem wir ja nun wissen, wie man das wahrscheinlichkeitstheoretische Modell des Inkubators korrekt zu deuten hat, können wir auch erklären, wann ein wahrscheinlichkeitstheoretisches Modell angebracht ist, das sich durch die Self-Indication-Assumption ergibt[70]: Wiederum betrachten wir den modifizierten Inkubator mit Wartegelegenheit, wobei es jetzt eine andere Besetzungsregel gibt. Abhängig von einem fairen Münzwurf wird entweder eine zufällig ausgewählte Person in die rote Zelle überführt (Kopf) oder beide Insassen werden zufällig auf die rote und die blaue Zelle verteilt (Zahl). Hiermit wird wieder ein Zufallsexperiment geschildert, über welches eigentlich keine kontroversen Anschauungen herrschen können. Falls man überführt wurde, so ist es anfänglich bei Dunkelheit vernünftig, als Wahrscheinlichkeit $2/3$ für Zahl zu haben. Dies ergibt sich unmittelbar aus der Bayesformel (es bezeichne S das Ereignis, dass man ausgewählt wurde):

$$P(Z|S) = \frac{P(S|Z)P(Z)}{P(S|Z)P(Z) + P(S|K)P(K)} =$$

$$= (1 * 1/2)/(1 * 1/2 + 1/2 * 1/2) = 2/3.$$

Somit lässt sich zusammenfassen, dass beim Inkubator der Fehler begangen wird, dass durch die mathematische Modellierung Dinge gleich gemacht werden, die sich in einem essentiellen Aspekt unterscheiden.

[70]Das folgende Zufallsexperiment wurde ursprünglich von Olum [166] erdacht.

4.3 Zufallsglück und Wissen aus einer bayesianischen Sichtweise

In diesem Abschnitt möchten wir uns zwei Begriffen widmen, die gewissermaßen auf dem Wahrscheinlichkeitskonzept aufbauen: dem Zufallsglück und dem Wissen. Es mag vielleicht überraschen, dass man nicht gerechtfertigt von Wissen sprechen kann, ohne über Zufallsglück nachgedacht zu haben. Warum dem so ist, geht aus der nun folgenden Darstellung hervor.

4.3.1 Zufallsglück

Ebenso wie es verwunderlich ist, dass bis zum siebzehnten Jahrhundert keine ernsthaften Versuche zur Formalisierung von Wahrscheinlichkeiten gemacht wurden, mag es überraschen, dass bis vor kurzem noch keine Auseinandersetzung mit dem Begriff des Zufallsglücks in analytischer Hinsicht erfolgte. Vermutlich hatte man das Gefühl, es so gut zu verstehen, dass es keiner weiteren Beschäftigung bedürfe. Natürlich genossen Wahrscheinlichkeiten historisch gesehen Priorität, da sie fundamentaler und wissenschaftlichen Zwecken dienlich sind, während Zufallsglück ja immer auf Einzelpersonen zu beziehen ist. Letztendlich wurde eine genauere Untersuchung des Zufallsglücks durch das Buch „Epistemic Luck" von Pritchard [176] angestoßen, welches wiederum Coffman zum Anlass nahm, eine für ihn adäquate Beschreibung von Zufallsglück in „Thinking about luck" [37] auszuarbeiten. Diese soll nun hier unter Vergleich mit den Ansätzen von Rescher [183] und Pritchard präsentiert und diskutiert werden.
Als Erstes sei erwähnt, wie man Zufallsglück als metaphysische Relation aufzufassen habe. Hierzu gibt es kaum divergierende Meinungen, denn die Beschreibung von Zufallsglück als Relation zwischen Individuen[71] I und Ereignissen E scheint die natürlichste und beste zu sein. Sicherlich kann Zufallsglück auch Gruppen betreffen, aber es ist naheliegend, dieses auf individuelles Zufallsglück zurückzuführen, weshalb wir uns nur auf den Einzelfall konzentrieren werden.
Die von Coffman herausgearbeitete Definition[72] liest sich folgendermaßen[73]:

Zufallsglück nach Coffman
I hat zum Zeitpunkt t bezüglich E genau dann Zufallsglück, wenn a) I zum Zeitpunkt t ein fühlendes Lebewesen ist, b) E zum Zeitpunkt t objektive Auswirkungen auf I hat, c) es kurz vor t eine große Chance gab, dass kein ähnliches Ereignis mit vergleichbarer Signifikanz wie E an t eintreten würde, und d) E zum Zeitpunkt t nicht direkt von I kontrollierbar ist.

[71] Welche Arten von Individuen hierfür in Frage kommen, wird gleich erörtert.

[72] Er präsentiert zu einem Versuch immer wieder Einwände, welche in gewissen Fällen zu einer Modifikation führen. Da natürlich nicht klar ist, ob sich nicht noch weitere Unzulänglichkeiten aufdecken lassen, konstatiert er, dass seine Definition nur einen vorläufigen Charakter hat.

[73] Hierzu sei noch gesagt, dass diese auch auf Pech zutrifft, welches im Englischen als „bad luck" nur eine spezielle Ausprägung eines allgemeiner verstandenen Zufallsglücks darstellt.

Die Gründe für die Adoption dieser speziellen Bedingungen seien nun dargelegt. Bezüglich a) und b) sind die eigentlichen Fragen, wer oder was überhaupt Zufallsglück haben kann und ob dies im Falle eines Lebewesens von diesem erkannt werden muss. Als meinungsbildende Beispiele lassen sich ein Frosch, der unbeschadet die Autobahn überquert, und ein Mensch, der grundsätzlich ihm widerfahrene Vorteile als unwesentlich ansieht, anführen. Im Gegensatz zu dem von Coffman vertretenen Ansatz ist Pritchard der Auffassung, dass die beiden gerade erwähnten Beispiele keinen Fall von Zufallsglück darstellen können, was aber einer weithin natürlichen Intuition widerspricht. Die Forderung von Pritchard, dass das Lebewesen sich immer schon seiner glücklichen Lage bewusst sein muss, also diese insbesondere kognitiv erfassen kann und die Einschätzung auch vornimmt, wird von Rescher insoweit abgeschwächt, als dass es nur ein anderes Lebewesen geben muss, das in die Bresche springt und dies tut. Da es damit aber eine Rolle spielt, ob der Frosch auf der Autobahn überhaupt wahrgenommen wird, stuft Coffman dies als unzureichend ein. Interessanterweise gehen alle drei davon aus, dass es sich tatsächlich um Lebewesen handeln muss, und damit etwa ein kostbares Gemälde, welches ein Feuer unbeschadet übersteht, kein Zufallsglück gehabt hat, was sich dadurch begründen lässt, dass man tatsächlich nur seine eigene Beziehung zu dem Objekt hineinprojiziert.

Aber wie ist hier „Chance" zu verstehen? Coffman meint zunächst, man könne keinesfalls versuchen nur dann von Zufallsglück zu reden, wenn der spezielle Ausgang der Ereignisse noch nicht festgelegt war, da es dann bei Gültigkeit der Determinismusthese gar kein Zufallsglück gäbe. Damit hat er insofern Recht, als dass die Explikation des Bestehens von Zufallsglück unabhängig von metaphysischen Oberhypothesen sein sollte, da man täglich von Ersterem redet, ohne einen Gedanken an Letzteres zu „verschwenden". Weiterhin behauptet er, man müsse eine „große Chance" mit Hilfe des Konzeptes des „Risikos" interpretieren, welchem sich auch Pritchard in seinem Buch bedient. Dieses ist mittels der „leichten Möglichkeit" (easy possibility[74]) zu verstehen: Es besteht genau dann das *Risiko*, dass ein Ereignis zu einen Zeitpunkt eintritt, wenn es zu diesem Zeitpunkt *leicht* eintreten könnte. Und die leichte Möglichkeit muss ihrerseits wieder über die „modale Distanz" (modal distance), welche den Abstand möglicher Welten zur aktuellen misst, verstanden werden. Letztendlich wird dieser Abstand aufgrund „kleiner Veränderungen" (small changes[75]) definiert: Je kleiner die notwendigen Veränderungen sind, damit die aktuelle Welt die Gestalt einer möglichen annimmt, desto kleiner ist der modale Abstand dieser möglichen Welt. Zusammengefasst: Es besteht genau dann eine große Chance, dass E nicht eintritt, wenn das Ereignis in mindestens der Hälfte der möglichen Welten, welche sich höchstens durch eine kleine Änderung aus der aktuellen Welt ergeben, nicht eintritt.

Zur Unterscheidung zwischen Zufallsglück und „Schicksalsglück" (fortune) bemerkt

[74]Mehr hierüber findet man bei Sainsbury [187] und Williamson [249].
[75]Vgl. Sainsbury [187] und VanInwagen [230].

Coffman noch, dass sich diese am Beispiel des russischen Roulettes mit einer einzigen Kugel festmachen lässt. Falls ein Mensch dieses überleben sollte, ist es ungerechtfertigt von Zufallsglück zu sprechen, da mit einer einzigen Kugel nicht einmal die Hälfte des Revolvers gefüllt war. Es geht nicht allein um den Wert des genossenen Vorteils, sondern auch um dessen Zustandekommen, weshalb sogar Fälle, in denen es um so etwas Wichtiges wie das nackte Überleben geht, nicht grundsätzlich bei einer positiven Wendung als glücklich bezeichnet werden können. Hierin unterscheidet sich die Auffasssung von Rescher, nach welcher das Ereignis nicht notwendigerweise „against the odds" sein muss. Sicherlich wird es kaum jemanden geben, der das Überleben umgangssprachlich nicht als Zufallsglück bezeichnen würde, aber die Einordnung von Coffman erscheint aus theoretischen Überlegungen heraus sinnvoller und konsistenter zu sein.
Die Klausel „kein ähnliches Ereignis mit vergleichbarer Signifikanz" soll zwei Arten von pathologischen Fällen ausschließen. Erstens kann es sein, dass sich bei Ausbleiben des glücklichen Ereignisses ein mindestens so guter Vorteil ergibt, was im Endeffekt bedeutet, dass das betreffende Lebewesen eigentlich gar nicht schlechter gestellt hätte werden können. Zum Beispiel wäre ein Lottogewinn sicherlich kein Fall von Zufallsglück, wenn einem andernfalls ein Millionär aus reinem Mitleid eine seiner Millionen geschenkt hätte. Insofern sind andere Ereignisse mit vergleichbarer Signifikanz auszuschließen; jedoch ist diese Forderung zu stark, da es zweitens ein vollkommen unabhängiges paralleles Szenario geben kann, in dem ein großartiger Vorteil geradezu garantiert ist. Etwa wäre ein Lottogewinn immer noch ein Fall von Zufallsglück, auch wenn zum Zeitpunkt der Ziehung gleichzeitig eine berufliche Beförderung des Menschen bekannt würde. Ergänzte man „ähnlich" nicht, so würde das Zufallsglück gewissermaßen von dem zweiten Szenario neutralisiert werden. Es scheint einer natürlichen Intuition zu entsprechen, dass das Zufallsglück in einer bestimmten Angelegenheit nicht von einer völlig anderen Sache, die keine Verbindung dazu aufweist, beeinflusst wird.
Schließlich bezieht sich noch d) darauf, dass Coffman nicht von Zufallsglück sprechen möchte, wenn sich das Ereignis unter der Kontrolle des Subjektes befindet, da es unpassend wäre, wenn man es beliebig herbeiführen könnte. Als Beispiel wird von ihm eine Spende an eine wohltätige Organisation gebracht[76].
Zusammenfassend sei erwähnt, dass die Ansätze von Pritchard und Rescher parallel die Punkte a), b) und c) betrachten, jedoch bei ihnen d) und die Ausnahmeklausel in c) völlig absent ist.

Wenn man nun Zufallsglück aus einer bayesianischen Sichtweise deuten möchte, was durch die in Kapitel 2 Abschnitt 3 gegebenen Gründe motiviert wird, muss man lediglich ein paar geringfügige Modifikationen vornehmen. Die größte Änderung ergibt sich wohl bei der Bedingung c), denn hier sollte man wie von Rescher vorgeschlagen an ein epistemisches Subjekt appellieren. Zudem sind die möglichen Welten passenderweise mit Glaubensgraden statt einer modalen Metrik zu bewerten. Die

[76]Das hierbei erfahrene Glück ist moralischer Natur.

fundamentale Einsicht besteht darin, dass Zufallsglück von Beobachtern zugeschrieben wird und es noch nie anders war. Um dies zu verdeutlichen, sei auf eine ähnliche Problematik in der Ästhetik verwiesen, wo man auch mit Recht behauptet, dass die Schönheit im Auge des Betrachters liege. Weiterhin können wir die restlichen Bedingungen, die von Coffman vernünftig herausgearbeitet wurden, unverändert übernehmen. Man mag vielleicht noch fragen, ob man jetzt neben fühlenden Wesen nicht doch beliebige Dinge erlauben könnte, wenn sich doch alles im epistemischen Rahmen eines Beobachters abspielt. Allerdings wären derartige Personifikationen von unbelebten Gegenständen doch etwas übertrieben, da es darum geht, dass der erfahrene Vorteil für das Individuum fühlbar ist. Damit ergibt sich schließlich das bayesianisch gedeutete Zufallsglück:

Zufallsglück aus einer bayesianischen Sichtweise
I hat zum Zeitpunkt t bezüglich E genau dann Zufallsglück, wenn a) I zum Zeitpunkt t ein fühlendes Lebewesen ist, b) E zum Zeitpunkt t objektive Auswirkungen auf I hat, c) E zum Zeitpunkt t nicht direkt von I kontrollierbar ist und d) dies im epistemischen Rahmen eines Beobachters verankert ist, der die Wahrscheinlichkeit, dass kein ähnliches Ereignis mit vergleichbarer Signifikanz wie E an t eintritt, mit mehr als $1/2$ bewertet.

4.3.2 Wissen

4.3.2.1 Die Sicherheitsprinzipien von Pritchard

Über den Begriff des Wissens macht man sich schon seit den Anfängen der Philosophie Gedanken. Bereits Platon stellt in seinem Dialog Menon die Frage, was Wissen wertvoller als einen bloßen wahren Glauben mache. In der Epistemologie wurde Wissen gelegentlich mit einem begründeten wahren Glauben (justified true belief) gleichgesetzt, allerdings merkte man, dass Wissen keine reine Glücksangelegenheit (im Sinne von Zufallsglück) sein darf, wie durch die „Gettier-Fälle" [75] verdeutlicht wurde.
Smith glaubt, dass Jones sowohl eine Anstellung bekommt als auch zehn Cent in seiner Jackentasche hat. Daraus folgert er begründet die wahre Aussage, dass die Person, die zehn Cent in ihrer Jackentasche hat, eine Anstellung bekommt. Tatsächlich bekommt aber er selber die Anstellung und hat zufällig zehn Cent in seiner Jackentasche.
Smith glaubt, dass Jones einen Ford besitzt. Daraus folgert er begründet die wahre Aussage, dass Jones einen Ford besitzt *oder* sich gerade in Barcelona befindet (für Letzteres hat Smith keinerlei Indizien). Tatsächlich besitzt Jones aber gar keinen Ford, hält sich aber gerade zufällig in Barcelona auf.
In beiden Fällen handelt es sich um einen begründeten Glauben, aber nur durch einen außerordentlichen Zufall ist dieser auch wahr, womit es doch etwas seltsam wäre, unter solchen Umständen von genuinem Wissen zu sprechen. Eng verwandt mit den Gettier-Fällen sind die „Zagzebski-Fälle" [254], welche alle unter eine von Zagzebski

ausgearbeitete Klassifizierung fallen. Sie werden nach dem folgenden Schema generiert: Man stelle sich eine Situation vor, in der eine Person einen begründeten aber falschen Glauben hat[77]. Nun betrachte man die gleiche Situation mit der Ausnahme, dass sich durch einen bizarren Zufall dieser Glaube doch als wahr erweist. Erneut liegt hier kein Wissen vor, da es doch außergewöhnlich war, dass die Person in ihrem Glauben korrekt lag. Man mag nun die Vermutung haben, dass Gettier-Fälle Spezialisierungen der Zagzebski-Fälle sind, allerdings gibt es einige Philosophen, die dieser nicht zustimmen. Da für unsere weitere Darstellung das Abhängigkeitsverhältnis unerheblich ist, wollen wir hierauf nicht weiter eingehen. Grundlegend ist nur, dass es eine Zufälligkeit gibt, die es zu eliminieren gilt.
Pritchards Lösungsvorschlag in [176], der uns erlaubt, in den gerade besprochenen Beispielen die Absenz von Wissen zu attestieren, ist das sogenannte „Sicherheitsprinzip" (safety principle)[78], welches in einer leicht abgeänderten Form bereits von Sosa [211] formuliert wurde[79]:

Sicherheitsprinzip (−2)
Der Glaube der Person A ist genau dann *sicher*, wenn in den meisten nahegelegenen möglichen Welten (in most near-by possible worlds)[80], in denen A fortfährt, ihren Glauben in die Zielproposition auf die gleiche Weise wie in der aktuellen Welt zu formen, der Glaube wahr bleibt[81].

Damit Wissen vorliegen kann, ist es notwendig, dass der Glaube sicher ist. Offensichtlich ist das der Glaube in den obigen Beispielen nicht, da in den meisten nahegelegenen möglichen Welten Smith keine zehn Cent in seiner Jackentasche hat beziehungsweise Jones sich an irgendeinem anderen Urlaubsort befindet. Es ist noch zu erwähnen, dass der Fokus von Pritchard auf vollständig kontingenten Propositionen liegt und das Sicherheitsprinzip nicht ohne Weiteres auf notwendige Propositionen angewendet werden kann, da sonst die Bedingung trivial wird[82].

---

[77] Hierbei ist es entscheidend, dass es sich um eine fallible Begründung handelt.

[78] Hierbei handelt es sich um ein objektives Kriterium, welches sprecherunabhängig ist; wenn hier davon gesprochen wird, dass „wir" etwas intuitiv als Wissen klassifizieren würden, so urteilen wir aus der „Gottesperspektive". Aus theoretischen Erwägungen ist ein sprecherunabhängiges Kriterium zu bevorzugen, jedoch wählten wir im vorigen Abschnitt für Zufallsglück aus zwei Gründen ein sprecherabhängiges Kriterium: erstens sehen wir in einer bayesianischen Sichtweise davon ab, absolute objektive Wahrscheinlichkeiten zu postulieren, und zweitens konnten wir die Bedingung bezüglich der Wahrscheinlichkeit nicht auf das Lebewesen umlegen, bei welchem es sich möglicherweise um einen Frosch handelt. Das Umlegen der Bedingung wird uns jedoch in diesem Abschnitt gelingen, so dass wir aus bayesianischer Sicht ein sprecherunabhängiges Kriterium geben können.

[79] Tatsächlich können ähnliche Prinzipien auch in den Arbeiten von DeRose [48], Sainsbury [187] und Williamson [249] gefunden werden, aber Pritchard bezieht sich explizit auf Sosa.

[80] Die Abstände sind in einem objektiven Verständnis zu deuten. Auf diesen wichtigen Punkt gehen wir später detaillierter ein.

[81] Wenn wir im Folgenden von möglichen Welten sprechen, so meinen wir immer solche nahegelegenen möglichen Welten, in denen die relevanten Anfangsbedingungen für die Formung des Glaubens die gleichen wie in der aktuellen Welt sind.

[82] Das gilt unabhängig davon, ob diese Notwendigkeit logischer, nomologischer oder einer anderen Art ist. Streng nach Platon kann man nur Wissen bezüglich logischen Sachverhalten (Idealen) haben,

Dieser Vorschlag mag prima facie die Problematik lösen, aber tatsächlich kann diese Art von Sicherheitsprinzip nicht mit einem alltäglichen Beispiel, einer Lotterieziehung, korrekt umgehen. Man stelle sich vor, eine Person besitzt einen Lotterieschein[83] und hat, kurz bevor die Ziehung durchgeführt wird, den Glauben, dass ihr Schein nicht sechs Richtige enthält. Kann man hier von Wissen sprechen? Eigentlich nicht; und das obwohl nach allem, was bekannt ist, die Person in der Mehrzahl der möglichen Welten nicht den Hauptgewinn einfährt. Es gibt an sich nur einige wenige mögliche Welten, in denen dies trotzdem eintritt, und aufgrund dieser würde man intuitiv nicht Wissen zugestehen. Natürlich könnte man nun behaupten, dass das Sicherheitsprinzip (-2) ja nur als notwendige Bedingung gedacht war, die allein noch nicht hinreichend ist. Da man aber hier gerade nicht von Wissen sprechen möchte, weil es sich um eine Glücksangelegenheit handelt, und das Sicherheitsprinzip (-2) eigentlich dazu eingeführt wurde, um mit solchen Fällen umgehen zu können, wäre diese Antwort wenig befriedigend. Stattdessen bietet es sich an, das Sicherheitsprinzip zu verstärken, was Pritchard dann auch tut:

Sicherheitsprinzip (-1)
Der Glaube der Person A ist genau dann *sicher*, wenn in fast allen (oder sogar allen) nahegelegenen möglichen Welten (in nearly all (if not all) near-by possible worlds), in denen A fortfährt, ihren Glauben in die Zielproposition auf die gleiche Weise wie in der aktuellen Welt zu formen, der Glaube wahr bleibt.

Da es nur in einigen wenigen möglichen Welten sechs Richtige auf dem Lottoschein gab, war der Glaube unter dem Sicherheitsprinzip (-2) sicher, weil aber die im Sicherheitsprinzip (-1) verankerte strengere Forderung damit nicht erfüllt wird, ist der Glaube unter diesem nicht sicher. Das Lotteriebeispiel mag eindeutig formuliert gewesen sein. Was passiert aber in einem Fall, in dem sich ein gewisser Deutungsspielraum ergibt? Ein solcher wird von Sosa [212] durch das mittlerweile bekannt gewordene „Abfallschachtbeispiel" (rubbish chute example) beschrieben. Eine Person, die in einem Hochhaus wohnt, wirft auf ihrem Weg zum Aufzug einen Müllbeutel in den Abfallschacht. Obwohl sie in Erwägung zieht, dass sich der Müllbeutel durch einen äußersten Zufall irgendwo verklemmt haben könnte[84], geht sie davon aus, dass er unten angekommen ist. Intuitiv würde man hier von Wissen sprechen und das wird insofern vom Sicherheitsprinzip eingefangen, als dass sich in fast allen möglichen Welten die Mülltüte im Keller befindet. Jedoch kann man kritisch fragen, woher denn bekannt sei, dass dies in fast allen möglichen Welten so gelte. Diese Frage ist durchaus berechtigt und Pritchard gibt es in [177] auch zu: „Closer

aber Pritchard versucht gerade, eine sinnvolle Essenz für vollständig kontingente Propositionen zu isolieren.

[83] Es wird angenommen, dass alle Informationen, die über die Lotterie bekannt sind, diese als nahezu ideale Verwirklichung der Gleichverteilung erscheinen lassen.

[84] Obwohl es nicht explizit erwähnt wird, sollte man sich, wie auch Pritchard vorschlägt, an einer Stelle eine Unregelmäßigkeit im Schacht vorstellen. Sosa selbst spricht bezüglich eines Einklemmens von „incredibly rare occurence".

inspection of the rubbish chute example reveals, however, that the challenge it poses to [Sicherheitsprinzip (-1)][85] is not nearly as clear as many have thought.". Sein Fazit ist jedoch „Everything thus depends on how we are understanding the details of the case." und er stellt fest, dass das Sicherheitsprinzip in jedem Fall das richtige Resultat liefere: Klemmen sich etwa die Beutel jedes Mal beinahe ein, so liegt kein Wissen vor, andernfalls aber schon[86].
Greco bezweifelt aber grundsätzlich, dass ein solches Prinzip helfen kann, über das Vorliegen von Wissen zu entscheiden. In „Worries about Pritchard's safety" [87] präsentiert er mehrere delikate Fälle, um dies zu verdeutlichen. Zwei von ihnen seien erwähnt.

Vogel's Hole-In-One Case[87]:
Sechzig Golfer nehmen an dem „Wealth and Privilege Invitational" teil. Der Kurs hat ein sehr schwieriges Loch, das als der „Herzensbrecher" bekannt ist. Bevor das Turnier beginnt, denkt sich ein Zuschauer, dass sicherlich nicht alle sechzig Teilnehmer den Herzensbrecher gleich beim ersten Versuch bezwingen werden.
Typing Monkey Case:
Ein Affe sitzt an einem Computer und fängt an auf die Tastatur zu hämmern. Der Besitzer ist überzeugt, dass er nicht eine perfekte Kopie von Tolstois „Krieg und Frieden" schreiben wird.

Diese Beispiele sind insofern äquivalent zum Lotteriefall, als dass es nur eine kleine Anzahl von möglichen Welten gibt, in denen der Glaube nicht der Wahrheit entspricht. Trotzdem ist es absurd, in diesen Fällen nicht von Wissen zu sprechen, da es geradezu offensichtlich ist, dass sechzig Amateurspieler hintereinander nicht gleich beim ersten Mal ein äußerst schwieriges Loch treffen beziehungsweise ein Affe auf wundersame Weise Tolstois Roman abtippt. Das Sicherheitsprinzip (-1) kann aber nicht zwischen diesen Fällen unterscheiden.
Die Intuition, die sich hinter dem Einwand von Greco verbirgt, besteht darin, dass mögliche Welten ein umso größeres Gewicht bekommen sollten, je näher sie sich an der Aktualität befinden. Das Sicherheitsprinzip (-1), welches Pritchard schließlich in seinem Buch aufstellt, trägt diesem Umstand nicht genügend Rechnung. In der ursprünglichen Formulierung des Prinzips wurde ja schon erkannt, dass es um mögliche Welten gehen muss, die ein gewisse Nähe zur Aktualität aufweisen; jedoch wurden diese ungeachtet ihres genauen Abstandes gleich behandelt, solange sie nur „nahe" waren. In dem auf sein Buch folgenden Aufsatz „Anti-Luck Epistemology" [177] nimmt er deshalb den Einwand von Greco zum Anlass, um nochmals eine Verbesserung seines Sicherheitsprinzips vorzustellen. Darin betont er, dass es eigentlich ganz natürlich einzusehen sei, dass in unsere Beurteilung des Grades des Zufallsglücks immer schon die genaue Nähe der möglichen Welten eingehe, denn allein die Anzahl

[85] Pitchard selbst verwendet andere Bezeichnungen für die einzelnen Prinzipien.
[86] Da für Pritchard die Sicherheitsprinzipien nur notwendige Bedingungen darstellen, wird Wissen von ihnen in dem Sinne erkannt, dass es nicht ausgeschlossen wird.
[87] Dieser stammt aus [238].

reiche dafür nicht aus.

Sicherheitsprinzip 0
Der Glaube der Person A ist genau dann *sicher*, wenn in den meisten nahegelegenen möglichen Welten (in most near-by possible worlds), in denen A fortfährt, ihren Glauben in die Zielproposition auf die gleiche Weise wie in der aktuellen Welt zu formen, und in allen sehr nahegelegenen möglichen Welten (in all very close near-by possible worlds), in denen A fortfährt, ihren Glauben in die Zielproposition auf die gleiche Weise wie in der aktuellen Welt zu formen, der Glaube wahr bleibt.

Da nun abhängig von der genauen Nähe die möglichen Welten unterschiedlich in die Beurteilung der Sicherheit eingehen, kann erfolgreich zwischen dem Lotteriefall und Grecos Beispielen unterschieden werden: Bei Letzteren wird der Glaube der betreffenden Person in allen sehr nahegelegenen möglichen Welten wahr, während es beim Lotteriefall mindestens eine sehr nahe an der Aktualität gelegene mögliche Welt gibt, in welcher der Teilnehmer Millionär wird. Zudem können mit dem Sicherheitsprinzip 0 alle bisherigen Beispiele in konsistenter Weise weiter korrekt beschrieben werden.

Schließlich zeigt Pritchard noch, wie sein Sicherheitsprinzip 0 eines der schwierigsten Probleme der gegenwärtigen Epistemologie, „Hawthorne's lottery puzzle"[88], löst. Jemand, der in bescheidenen Verhältnissen lebt, behauptet, er wisse, dass er es sich finanziell nicht leisten könne, nächste Woche auf eine Afrika-Safari zu gehen, obwohl er Urlaub hat. Man ist geneigt, diese Aussage (abgekürzt $A1$) als wahr zu betrachten. Würde die Person aber behaupten, sie wisse, dass sie nächste Woche keine große Summe in der Lotterie gewinnen werde, so würde man diese Aussage (abgekürzt $A2$) viel weniger als wahr erachten. Das Problem ist aber, dass man mit Hilfe einer simplen Deduktion von der ersten auf die zweite Aussage folgern kann, wonach auch bei $A2$ Wissen vorliegen müsste, was einen Widerspruch ergibt[89].
Pritchards Lösung besteht in der Feststellung, dass das wichtigste Detail in diesem Beispiel unterschlagen wurde: nämlich ob die Person ein Lotterieticket besitzt oder nicht. Bezüglich des Problems in seiner intendierten Form bedeutet dies: Damit man $A1$ zustimmen kann, darf die Person kein Lotterieticket besitzen. Dann ist es aber auch nicht verwunderlich, wenn man $A2$ zustimmt. Besitzt sie jedoch eines, so liegt sowohl bei $A1$ als auch $A2$ kein Wissen vor, denn es gibt eine sehr nahe an der Aktualität gelegene mögliche Welt, in der die Person gewinnt und damit auch das Geld für eine Safari hat. Da man mit Hilfe des Sicherheitsprinzips 0 Hawthornes Lottoproblem lösen kann, bewahrt es uns laut Pritchard davor, in eine Form des

[88]Dieses wurde in [97] formuliert. Wie in der Präsentation von Pritchard wird es auch hier dahingehend modifiziert, dass sich der Zeitraum auf eine Woche statt ein Jahr bezieht, da dies den Sachverhalt noch mehr zuspitzt.

[89]Wäre von einem Jahr statt von einer Woche die Rede, so könnte man bei $A1$ wohl nicht gerechtfertigt behaupten, dass man wisse, dass die Person nicht genug Geld haben werde, da in einem Jahr viel passieren kann.

epistemologischen Revisionismus zu flüchten, welchen man als letzte Antwort auf das Problem ansah[90].

4.3.2.2 Veridisches und reflektives epistemisches Zufallsglück

In seinem Buch [176] setzt sich Pritchard detailliert damit auseinander, wie Zufallsglück Wissen beeinflussen kann. Dabei unterscheidet er zwischen Arten von Zufallsglück, die generell mit Wissen kompatibel sind, und solchen, die sich möglicherweise inkompatibel gestalten. Erstere Arten können etwa darin bestehen, dass man unerwartet ein wichtiges Indiz aufdeckt oder sich glücklicherweise in der Position befindet, kognitive Fähigkeiten zu haben, welche einem das Erkennen von Wissen erlauben. Diese Formen von Zufallsglück sind unbedenklich, da Zufallsglück in den Startbedingungen zur Wissenserlangung das Wissen an sich nicht unterminiert. Dagegen gibt es Zufallsglück, das nach den Startbedingungen den Umstand betrifft, ob eine Proposition tatsächlich wahr wird oder ist. Pritchard nennt es „veridisches epistemisches Zufallsglück" (veridic epistemic luck) und es wird mit Hilfe einer objektiven Metrik auf möglichen Welten erfasst, welche von einem speziellen epistemischen Subjekt unabhängig ist; seine Sicherheitsprinzipien versuchen es auszuschließen. Diese Ausprägung des Zufallsglücks grenzt er von dem sogenannten „reflektiven epistemischen Zufallsglück" (reflective epistemic luck) ab, welches mittels einer Metrik auf den möglichen Welten beschrieben wird, die sich allein aus dem Kenntnisstand des epistemischen Subjekts ergibt. Um den Unterschied zwischen diesen beiden Formen des Zufallsglücks zu veranschaulichen, gibt er das Beispiel des „notorious chicken sexer", in dem eine Person versucht, das Geschlecht von Küken zu bestimmen. Dabei sind zwei Extremfälle denkbar: der „naive" und der „erleuchtete" Chicken-Sexer. Ersterer kann aufgrund einer besonderen Fähigkeit immer die korrekte Feststellung treffen, aber ist sich dessen nicht bewusst; Letzterer hat nicht nur diese Eigenschaft, sondern er ist sich auch noch im Klaren darüber. Bei dem naiven Chicken-Sexer liegt reflektives aber kein veridisches epistemisches Zufallsglück vor, bei dem erleuchteten Chicken-Sexer sogar keines von beiden. In beiden Fällen besteht jedoch Wissen, da reflektives epistemisches Zufallsglück laut Pritchard unerheblich ist.

Nun wollen wir unvoreingenommen beurteilen, inwiefern die Abwesenheit von veridischem epistemischem Zufallsglück allein für das Vorliegen von Wissen ausreichen kann. Pritchard weist ausdrücklich darauf hin, dass er nur notwendige Bedingungen gibt, allerdings besteht der nächste logische Schritt im Suchen nach hinreichenden Bedingungen.
Pritchards „Anti-Zufallsglück-Epistemologie" führt auf natürliche Weise zu einer externalistischen Epistemologie, also einer solchen, die von dem Wissenden nicht verlangt, dass er eine internalistische Begründung seines Glaubens geben kann. Die-

[90] Etwa könnte man behaupten, dass Wissen unter Deduktionen nicht erhalten bleibe ([52], [165]), oder man könnte eine kontextualistische Behandlung geben ([48], [141], [39]).

ser Umstand läuft aber einer tief in der Intuition verwurzelten Anschauung von Wissen zuwider. Pritchard gibt dies sogar zu, indem er bemerkt „that there is something correct underlying the very natural complaint that the internalist makes ...". Warum sieht er aber allein die Abwesenheit von veridischem epistemischem Zufallsglück als essentiell an? Seine Motivation dafür ist darin verankert, dass man durch diese Deutung von Wissen ziemlich einfach die Akzeptanz skeptischer Hypothesen, etwa dass man selbst ein „brain in a vat"[91] sei, verweigern könne. Allerdings muss er auch Einschränkungen diesbezüglich feststellen: „Essentially, it boils down to the claim that the kind of knowledge that is rescued from the sceptic in externalist anti-sceptical theories puts knowledge on a par with the brute knowledge possessed by the naïve chicken-sexer ...". Die Problematik skeptischer Hypothesen besteht aber gerade darin, dass man keinen durch Erfahrung begründeten Anlass hat, sie abzulehnen (obwohl man einen solchen eigentlich gerne haben möchte)[92]. Dazu Pritchard: „If this is right, then it is little wonder that externalist responses to the sceptical problem - and neo-Mooreanism[93] in particular - while formally able to block the sceptical argument, are not such as to fully intellectually satisfy us.".
Damit ist zusammenzufassen: Es war schon anfänglich klar, dass der alleinige Verlass auf die Absenz von veridischem epistemischem Zufallsglück eigentlich nicht für Wissen ausreichen kann. Der Anlass, reflektives epistemisches Zufallsglück zu vernachlässigen, war in einem Versuch, das skeptische Problem zu lösen, begründet; allerdings wird durch diesen die eigentliche Problematik gar nicht erfasst.
Dass die Abwesenheit von reflektivem epistemischem Zufallsglück allein nicht genügen kann, das zeigten schon die Gettier-Fälle. Deshalb ist es nun naheliegend zu untersuchen, ob die Absenz beider Arten von Zufallsglück für Wissen ausreichen kann. Aber auch dies trifft nicht zu, wie ein Gegenspiel von Hiller und Neta [98] zeigt. In einem temperierten Behälter befindet sich eine Flüssigkeit, die sofort explodiert, sobald ihre Temperatur auf $50,01$ Grad Celsius steigt oder auf $49,99$ Grad Celsius sinkt. An dem Behälter, der auch für andere Substanzen eingesetzt wird, befindet sich eine digitale Anzeige, welche die Temperatur im Innern in ganzzahligen Grad angibt. Dieses Thermometer ist aber jetzt defekt und zeigt alle fünf Minuten eine zufällige Zahl an. Nun kommt eine nicht über diese Bedingungen informierte Person vorbei, für die lediglich ein Behälter mit einer absolut zuverlässigen Temperaturanzeige vorliegt (das Thermometer stamme etwa von einem vertrauenswürdigen Hersteller). Zufällig zeigt das Thermometer in genau dem Moment, als sich die Person davor befindet, 50 Grad Celsius an, wonach die Person zu dem Schluss kommt, dass die Flüssigkeit im Behälter ungefähr 50 Grad Celsius habe. Reflektives epistemisches Zufallsglück ist hier ausgeschlossen, da die Person vollstes Vertrauen in die Gerätschaften hat, wie auch immer es begründet sein mag. Veridisches epistemisches Zufallsglück ist

[91] Ein „brain in a vat" ist ein Gehirn in einem Behältertank. Diesem werden alle Reize vorgegaukelt, die man als normaler Mensch empfinden würde.

[92] Pritchard meint, das Erkennen des Umstandes, dass reflektives epistemisches Zufallsglück in diesem Sinne ineliminierbar ist, führe zu „epistemic angst"[175].

[93] Damit wird gerade der Versuch, das skeptische Problem mit Hilfe einer Anti-Zufallsglück-Epistemologie zu behandeln, bezeichnet.

ausgeschlossen, da es offensichtlich *keine* mögliche Welt gibt, in der die Person unbeschadet vor dem Behälter stehen kann und die Temperatur nicht ungefähr 50 Grad beträgt. Trotzdem liegt hier kein Wissen vor, da es wiederum vom Zufall abhängt, dass die Person den richtigen Glauben formt. Das Problem hierbei ist, dass die veridische Begründung von Wissen nicht mit der reflektiven „synchronisiert" ist. Beide erlauben auf ihre Art das Vorliegen von Wissen, allerdings führt der Umstand, dass sie dies auf völlig getrennten Wegen tun, dazu, dass intuitiv kein Wissen besteht.
Hiller und Neta nehmen dies als Anlass, als verfeinerte notwendige Bedingung vorzuschlagen, dass man keinen *relevanten ähnlichen Glauben* hätte formen können, der nicht wahr ist. Offensichtlich hätte die Person im gerade gegebenen Beispiel sehr einfach einen anderen Glauben bilden können; das defekte Thermometer hätte im Moment des Ablesens einfach nur eine andere Zahl anzeigen müssen. Allerdings bemerken sie selber, dass das Problem bei diesem Vorschlag darin liegt, dass es nicht klar sei, wie man (objektiv) die Nähe solcher möglicher Welten bestimmen könne: „However, it is not obvious how to determine the proximity of such possible worlds, and that difficulty may be an insurmountable obstacle.".

4.3.2.3 Ein bayesianischer Lösungsvorschlag

Demnach gibt es bei dem Versuch, eine Anti-Zufallsglück-Epistemologie auszuarbeiten, neben der Synchronisation der Abwesenheit von veridischem und epistemischem Zufallsglück noch zwei große Problemfelder. Erstens ist es etwas willkürlich, wie man die genaue Grenze für einen sicheren Glauben bestimmt. Was hat man denn genau unter den „meisten" möglichen Welten zu verstehen? Hierauf kann man noch die kanonische Antwort „mehr als die Hälfte" geben, aber es muss berechtigt die Frage gestellt werden, *wie* nahe denn nun „sehr" nahe sei. Zweitens fällt es schwer, eine objektive Metrik auf den relevanten möglichen Welten zu etablieren, da es keine einfache einheitliche Methodik gibt. Wir möchten nun einen Lösungsvorschlag präsentieren, der sich aus einem bayesianischen Ansatz ergibt:

Wissen aus einer bayesianischen Sichtweise
Eine Person, die nicht in ihren kognitiven Fähigkeiten eingeschränkt ist, besitzt genau dann Wissen bezüglich einer kontingenten Proposition, wenn a) die subjektive Wahrscheinlichkeit dieser Proposition beliebig nahe an eins sein könnte und b) es keine wahre Information geben wird, deren jetziger Einbezug diesen Umstand verhinderte.

Wie es sich für eine bayesianische Sichtweise gehört, operieren wir nicht mit einer modalen Metrik auf möglichen Welten, sondern mit Wahrscheinlichkeitsbewertun-

gen[94]. Der Wahrscheinlichkeitsbegriff ist mit Konnotationen belegt[95], welche viel natürlicher für eine Bewertung von möglichen Welten sind, da sie in einem prototheoretischen Verständnis verankert sind. Die Wahrscheinlichkeitswerte der verschiedenen Deutungen können in einer bayesianischen Auffassung geeignet emuliert werden. Zudem kann eine modale Metrik, wie auch immer sie zustande gekommen sein mag, passend in ein Wahrscheinlichkeitsmaß umgewandelt werden: Man nimmt einfach die invertierten Abstände und normiert sie. Weiterhin kann in einer subjektiven Sichtweise kein Streit über die genaue Bewertung der Welten entstehen: Das epistemische Subjekt setzt sie so fest, wie es es für angebracht hält[96]. Und das ist genau das, was zählt: Das Subjekt muss eine internalistische Begründung geben, damit Wissen bestehen kann. Dass diese nicht in relevanten Fakten von der objektiven Realität abweicht, wird durch Forderung b) sichergestellt; die wahre Information, welche möglicherweise die subjektive Wahrscheinlichkeit senkt, soll nur geglaubt werden, so dass hier keine zirkuläre Definition vorliegt. In einer vereinfachten Betrachtungsweise kann man die objektive Realität als den ultimativen epistemischen Rahmen verstehen; insofern garantiert Bedingung b), dass sich der Rahmen des Subjekts nicht in relevanter Weise von diesem unterscheidet[97], wobei diese Harmonisierung wiederum über Wahrscheinlichkeiten evaluiert wird. Wenn man so will, wird dadurch gleichzeitig veridisches und reflektives epistemisches Zufallsglück ausgeschlossen. Wie das Gegenbeispiel von Hiller und Neta zeigte, braucht man auch eine Synchronisierung zwischen diesen beiden Zufallsglücksarten. Eine solche wird hiermit ebenfalls geliefert. Schließlich wird durch Bedingung b) auch gleichzeitig garantiert, dass die fragliche Proposition wahr sein beziehungsweise werden muss.
Wie wir schon in Kapitel 3 Unterabschnitt 1.4 erläuterten, ist es sinnvoll, nur Tautologien mit der Wahrscheinlichkeit eins zu belegen, da sie nicht fallibel sind. Insofern ist klar, dass die Wahrscheinlichkeit einer kontingenten Proposition niemals eins annehmen darf. Trotzdem brauchen wir ein Kriterium, das darüber entscheidet, wann ein reiner Glaube zu Wissen wird. In unserer in Kapitel 3 Unterabschnitt 1.4 vertretenen Deutung wird an eine bestimmte mögliche Welt geglaubt, wenn sie relativ gesehen die größte Wahrscheinlichkeit besitzt. Demnach bietet es sich geradezu an und ist auch intuitiv durchaus begründet von Wissen bezüglich einer möglichen Welt

[94] Es ist auch möglich, unser Kriterium für das Vorliegen von Wissen mit Hilfe der (subjektiven) modalen Distanz von möglichen Welten zu formulieren. Um dies zu erreichen, müssen wir eine Entsprechung für die erste notwendige Bedingung finden. Stellvertretend bietet es sich hierzu an, erstens zu fordern, dass die Person an die Proposition glauben muss, und zweitens zu verlangen, dass die subjektive modale Distanz zur Aktualität mindestens einer möglichen Welt, in welcher die Proposition wahr bleibt, beliebig klein sein kann und dies für die anderen möglichen Welten nicht gilt. Die gerade eben gegebene Definition lässt sich problemlos auf Partitionen übertragen, die aus unendlich vielen möglichen Welten bestehen.

[95] Diese wurden in Kapitel 2 Abschnitt 1 dargestellt.

[96] Die Klausel „Person, die nicht in ihren kognitiven Fähigkeiten eingeschränkt ist" soll pathologische Fälle ausschließen.

[97] Im Sinne der in Kapitel 1 Abschnitt 3 besprochenen Stufen des Wissens muss sich das epistemische Subjekt insbesondere bei Konfrontation mit einer für den Wahrheitswert der Proposition negativ relevanten Information immer im Klaren sein, warum diese keine Auswirkungen auf die subjektive Wahrscheinlichkeit haben darf.

zu sprechen, wenn der Wahrscheinlichkeit absolut betrachtet eine besondere Eigenschaft zukommt. Der Glaube kann gewissermaßen aus einer Notsituation heraus geformt werden: Man hat in keine mögliche Welt großes Vertrauen, dennoch erscheint eine plausibler als ihre Alternativen[98]. Wissen impliziert stattdessen, dass aufgrund gesammelter Informationen die betreffende mögliche Welt deutlich von dem Rest unterschieden wird. Die spezielle Formulierung von Bedingung a) ist nun dadurch begründet, dass sie die Beliebigkeit einer Schranke bezüglich der Nähe auf kanonische Weise eliminiert. Ansonsten drängte sich unmittelbar die Frage auf, weshalb eine bestimmte Schranke und nicht eine andere zu wählen sei. Hierauf kann es keine befriedigende Antwort geben, da kein überzeugendes objektives Kriterium existiert, eine solche festzulegen. Man stelle sich den paradigmatischen Lottofall vor, wo der Konsens herrscht, dass kein Wissen bezüglich des Hauptgewinns vorliegt. Es wäre doch äußerst seltsam, wenn man die Lottoziehung nur um ein paar Kugeln ergänzen müsste, um berechtigt behaupten zu können, man wisse, dass der Hauptgewinn nicht ausgeschüttet werde.
Immer wenn die Wahrscheinlichkeit der komplementären Proposition nicht null ist, wird davon ausgegangen, dass sie der Fall sein kann; bei dem Vorliegen von Wissen tut man dies gerade nicht, jedoch darf nur Tautologien volle Wahrscheinlichkeit zugewiesen werden. Die einzig vernünftige Lösung besteht darin, die Abwesenheit einer Schranke zu fordern. Wenn die Wahrscheinlichkeit nun beliebig nahe an der Eins sein kann, welcher konkrete Wert ist dann für sie zu wählen? Das bleibt dem epistemischen Subjekt selber überlassen, sie sollte aber in jedem Fall die Mindestgrenze von 1/2 überschreiten, welche man als kanonisch bezeichnen kann.

Nachdem die bayesianische Definition von Wissen motiviert wurde, wollen wir nun ihre Leistungsfähigkeit anhand der bereits genannten Beispiele (in ihrer intendierten Präsentation) überprüfen. Sie sind in zwei Sorten aufzuteilen.
Bei der ersten Sorte liegt durchgängig kein Wissen vor, da dem epistemischen Subjekt jeweils eine essentielle Information nicht bekannt ist. Erfährt es diese, so kann die Wahrscheinlichkeit nicht mehr guten Gewissens höher als eine beliebige Schranke angesetzt werden. Wir listen auf, welche Information jeweils absent ist. Gettier-Fall 1: die Gründe, warum Jones nicht die Anstellung bekommt; Gettier-Fall 2: Jones besitzt keinen Ford; Zagzebski-Beispiele allgemein: der Umstand, warum die Begründung nicht so gut ist, wie es das Subjekt eigentlich denkt; explosive Substanz: Das Thermometer spinnt.
Bei der zweiten Sorte sind der Person alle relevanten Informationen bekannt, jedoch ist genau darzulegen, ob es eine Schranke[99] für die Wahrscheinlichkeit gibt[100]. Lotteriebeispiel, wenn die Person einen Lottoschein besitzt (kein Wissen): Da die Wahr-

[98]Diese Deutung ist durchaus mit dem Glauben in religiösen Angelegenheiten konform. Die Herausforderung, zu dem Glauben zu finden, besteht gerade darin, die betreffende mögliche Welt relativ auszuzeichnen, obwohl man keinerlei handfeste Beweise hat.
[99]Natürlich ist klar, dass Wahrscheinlichkeiten durch die Eins beschränkt sind. Unter „Schranke" verstehen wir hier eine solche, die kleiner als eins ist.
[100]In geeigneten Fällen wird das Principal Principle angewendet.

scheinlichkeit für einen größeren Gewinn zwar klein, aber nicht null ist, kann die subjektive Wahrscheinlichkeit des Individuums nicht beliebig anwachsen. Bei dem Müllschachtbeispiel haben wir schon gemerkt, dass es auf die genauen Einzelheiten ankommt; je nachdem wie sie ausfallen, besteht Wissen oder nicht. Insbesondere muss gelten, dass man nicht mehr gerechtfertigt von Wissen sprechen kann, wenn sich schon einmal eine Mülltüte eingeklemmt hat, da es dann nach dem Prinzip der direkten Wahrscheinlichkeit wiederum eine Schranke gibt. Jetzt das Golfturnier (Wissen): Da die Teilnehmer doch eine amorphe Masse bilden und nicht alle Vollprofis sind, lässt sich ein Teilnehmer finden, für den ein Einlochen beim ersten Versuch so gut wie unmöglich ist. Bei dem tippenden Affen ist dagegen etwas genauer zu unterscheiden, denn er ist nicht so klar, wie von Greco vorgegeben wird[101]. Unsere Definition hilft uns dabei, den Fall genauer zu klassifizieren. Wenn man die Wahrscheinlichkeit in der klassischen Deutung betrachtet, dass eine zufällige Zeichenfolge genau Tolstois „Krieg und Frieden" ergibt, so ist sie natürlich deutlich kleiner als die eines großen Lottogewinns. Gäbe der Computer allein irgendwelche Zeichenfolgen aus, dann könnte man nicht begründet davon sprechen, dass man wisse, das Buch würde nicht zustande kommen. Die Intuition, die dem Affenfall unterliegt, ist vielmehr, dass Affen aus menschlicher Sicht zu einem erratischen Verhalten neigen. Ehrlich gesagt ist es schwer vorstellbar, was einen Affen so lange am Computer halten sollte, damit er mit seinem Manuskript fertig wird. Tatsächlich kann man begründet die Wahrscheinlichkeit beliebig hoch ansetzen, dass er irgendwann keine Lust mehr hat oder die Tastatur (un)absichtlich zerstört; das bedeutet, dass obwohl in dem Teilereignis A, „Affe tippt so oft, wie das Werk von Tolstoi Zeichen hat", eine Schranke für die unkorrekte Verfassung des Romans existiert, es keine Schranke für das Gegenereignis von A gibt. Damit kann insgesamt die Wahrscheinlichkeit, dass der Affe keine Kopie abtippt, beliebig nahe an der Eins sein. Und schließlich noch zu Hawthornes Lotteriefall: Pritchard hat Recht, dass es eminent wichtig ist, ob die Person tatsächlich einen Lottoschein besitzt. Tut sie es, so existiert wie oben eine Schranke und bezüglich $A1$ und $A2$ liegt kein Wissen vor. Besitzt sie dagegen kein Lotterieticket, so besteht in beiden Fällen Wissen[102].

Damit haben wir gesehen, dass unsere Definition korrekt mit den Testbeispielen umgehen kann. Abschließend wollen wir noch auf zwei sich direkt aufdrängende Einwände eingehen. Erstens behaupten manche Erkenntnistheoretiker wie etwa Pritchard, dass man das Vorliegen von Wissen nicht von probabilistischen Erwägungen abhängig machen dürfe. Dies zeige sich daran, dass, auch wenn man bei der Lotterieziehung kein Wissen besitzt, man dies beim Lesen der eigenen Losnummer in einer Zeitung auf jeden Fall habe und das unabhängig von der Wahrscheinlichkeit für einen Tippfehler. Nun stelle man sich aber vor, die Zeitung habe einen Praktikanten beschäftigt, der jede zweite Woche die falschen Nummern abtippt. In so einem Fall

[101]Tatsächlich geht er gar nicht genauer auf ihn ein, da er für ihn offensichtlich ist.

[102]Es ist allerdings denkbar, dass die Person mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit einen Lottoschein kauft oder anderweitig zu Reichtum gelangt. Allerdings ist so, wie das Beispiel angelegt wurde, nicht davon auszugehen.

ist es aber nicht vernünftig, von Wissen zu sprechen, da man sich offensichtlich zu leicht irren könnte. Damit dürfen wahrscheinlichkeitstheoretische Erwägungen nicht einfach ausgeblendet werden. Zweitens mag man aufgrund der möglichen Pluralität von Meinungen versucht sein, zu vermuten, dass obige Definition von Wissen nichts tauge, da sie verschiedene Rechtfertigungen für das Wissen in einem konkreten Fall erlaubt. Darauf sei aber erwidert, dass zunächst die objektive Kopplung zusammen mit dem Umstand, dass keinerlei Einschränkung der kognitiven Fähigkeiten vorliegt, eine absurde Begründung verhindert und zudem das epistemische Subjekt keine Meinung willkürlich stipuliert, da es an einem Erkenntnisgewinn interessiert ist. Es kann sehr wohl sein, dass man auf vernünftigem Wege zu verschiedenen Begründungen gelangt, und insofern hat die Person bei Erfüllung der oben genannten Bedingungen maßgebliche Aspekte berücksichtigt.

Es bleibt festzuhalten, dass Ansätze zur Beschreibung von Wissen, welche im Vergleich zu bisherigen Vorgehensweisen versuchen den Begriff des epistemischen Zufallsglücks zu explizieren, einen wichtigen Fortschritt bei der Erfassung der Komponente darstellen, die zusätzlich zu einem wahren Glauben vorhanden sein muss.

Kapitel 5

Entscheidungstheorie

5.1 Bayesianische Entscheidungstheorie: Einführung

5.1.1 Motivation

Schon im ersten Kapitel in Abschnitt 1 formulierten wir den intendierten Zweck von Wahrscheinlichkeiten: Sie sollen in Entscheidungen münden können. Wahrscheinlichkeiten stellen damit eine Hilfe dar, um Entscheidungen vernünftig begründen zu können. Tagtäglich treffen Menschen Entscheidungen; diese Wahlen können sehr gut sein, ohne dass die betreffenden Menschen jemals eine Art Entscheidungstheorie kennengelernt, geschweige denn angewendet hätten. Wie kommt das? Es ist festzustellen, dass Menschen über eine ausgezeichnete und leistungsfähige Urteilskraft verfügen, die normalerweise viele relevante Dinge wie selbstverständlich einfließen lässt. Für deren Herkunft könnte man versuchen, eine darwinistische Erklärung zu geben: Nur diejenigen Menschen, die über die beste Einschätzung der Realität verfügten, konnten sich durchsetzen; doch ist es müßig, über den genauen Ursprung zu spekulieren. Angesichts der bestehenden hervorragend ausgebildeten Urteilskraft der Menschen, wozu braucht man da eine Entscheidungstheorie? Es scheint schwer vorstellbar, dass selbst die größten Entscheidungstheoretiker jede erdenkliche Situation ihres Lebens entscheidungstheoretisch modellieren. Der Status einer Entscheidungstheorie ist wohl ähnlich zu dem der klassischen Logik in der Antike: Aristoteles zeigte keine grundlegend neuen Arten des Räsonierens auf, welche vorher undenkbar gewesen wären; vielmehr leistete er durch seine Formalisierung und Präzisierung einen wertvollen Beitrag zur besseren und bewussteren Vergegenwärtigung von Formen des Denkens. Damit fällt es einem viel leichter, gewisse Inkonsistenzen beziehungsweise Täuschungen in seinem Denken aufzudecken, und zudem ermöglicht es, das Problem aus einem verallgemeinerten abstrakten Blickwinkel zu erfassen. Und genau dies ist unser Bestreben, wenn wir uns nun der Entscheidungstheorie zuwenden.

Welche Faktoren sind bei der Entscheidungsfindung zu berücksichtigen? In Kapitel 4 Unterabschnitt 1.1 führten wir Glaubensgrade als potentielle Handlungsgrundlage

ein, was braucht man also mehr? Die mehr oder weniger implizite Annahme war, das alle Optionen potentiell den gleichen Ertrag versprechen. Offensichtlich muss dies aber nicht so sein, was bedeutet, dass noch dieser Wert separat einzubeziehen ist. Es ist naheliegend, die Optionen mittels einer subjektiven Nutzensfunktion zu bewerten, welche mittels reellen oder rationalen Zahlenwerten angibt[1], wie nützlich die jeweilige Verwirklichung für den Entscheider ist[2].
Um zu überlegen, auf welche Weise diese beiden Faktoren, Wahrscheinlichkeiten und Nutzenswerte, in die Entscheidungsfindung einzubeziehen sind, etablieren wir nun einen formalen Rahmen[3] für die Bayesianische Entscheidungstheorie[4]. Grundsätzlich geht es hierbei um bestimmte Konsequenzen[5] für den Entscheider, welche mittels möglicher Welten beschrieben werden. Diese werden durch eine Aktion a_i und damit verbundenen Begleitumständen b_{ij} bestimmt, was den Ergebnisraum $W = \{w_{ij}\} = \{(a_i, b_{ij})\}$ liefert[6]. Die erste Komponente dieser Paare kann durch den Entscheider kontrolliert werden, der zweite Eintrag aber nicht. Offensichtlich können die Begleitumstände je nach gewählter Handlung variieren: Man denke nur an ein Szenario, in dem der Entscheider die Wahl zwischen zwei verschiedenen Glücksspielen hat. Jeder möglichen Welten w_{ij} wird durch eine Nutzensfunktion U und ein Wahrscheinlichkeitsmaß P ein Nutzenswert und eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet.
Die Frage ist jetzt nur, wie Nutzenswerte und Wahrscheinlichkeiten zusammenspielen sollen, um eine bestimmte Handlung auszuzeichnen. Wir brauchen also eine modifizierte Bewertung, in die Wahrscheinlichkeiten und Nutzenswerte gleichzeitig Eingang finden. Diese neue Evaluation sollte aus den schon in Kapitel 4 Unterabschnitt 1.1 genannten Gründen in einer eindimensionalen Skala resultieren, da damit dann die Existenz eines eindeutigen Maximums sicher gestellt wird. Somit kann man die modifizierte Bewertung, die wir als „erwarteten Nutzen" EU bezeichnen wollen[7], als Abbildung verstehen, welche bei fixiertem Ergebnisraum, Wahrscheinlichkeitsmaß und Nutzensfunktion jede Handlung auf eine reelle beziehungsweise rationale Zahl abbildet.
Wieso aber sollten diese beiden Aspekte genau so eingehen, wie bei dem auf die Handlung bedingten mathematischen Erwartungswert bezüglich der Nutzensfunkti-

[1] Reelle Zahlen dienen nur wieder dazu, den größten Grad an Allgemeinheit zu garantieren. Man nehme zum Beispiel an, man erhielte Auszahlungen in einer virtuellen Währung, die auch irrationale Zahlen zulässt.

[2] Eine lineare Skala ist aus den gleichen Gründen sinnvoll, die schon für Glaubensgrade angegeben wurden.

[3] Selbstverständlich betrachten wir wiederum nur endliche Anzahlen. Der hier beschriebene formale Rahmen lässt sich mühelos mittels geringfügiger Veränderungen auf die bekanntesten Axiomatisierungen anpassen.

[4] Das Adjektiv „bayesianisch" bezieht sich hier auf die Herkunft der verwendeten Wahrscheinlichkeiten. Eine propensitätstheoretische Entscheidungstheorie würde stattdessen Propensitäten berücksichtigen.

[5] Aus Gründen der Abwechslung werden wir auch „Resultat" oder „Ergebnis" sagen.

[6] Das Ereignis A_i, welches die Durchführung der Aktion a_i beschreibt, entspricht demnach allen Paaren, die mit a_i beginnen.

[7] Zunächst sind jegliche Analogien zu dem mathematischen Erwartungswert rein zufällig.

on? Eine populäre Begründung wird durch die Repräsentationstheoreme[8] gegeben: Wenn die Präferenzen des Entscheiders bezüglich der Handlungen sehr natürliche Forderungen wie etwa Transitivität erfüllen, dann existiert eine Nutzensfunktion und ein Wahrscheinlichkeitsmaß, so dass eine Handlung gegenüber einer anderen genau dann nicht präferiert wird, falls ihr erwarteter Nutzen kleiner oder gleich ist. Demnach wird *EU* in der Bayesianischen Entscheidungstheorie genau auf diese Art berechnet, was

$$EU(A_k) = \sum_{ij} U(w_{ij})P(w_{ij}|A_k)$$

für die einzelnen Werte bedeutet, und die Maximierung dieser Abbildung stellt das Entscheidungskriterium dar.

5.1.2 Wahrscheinlichkeiten für eigene Handlungen

Bei der Berechnung des erwarteten Nutzens einer Handlung gehen die auf die jeweilige Aktion bedingten Wahrscheinlichkeiten für verschiedene mögliche Weltzustände ein. Da man konditionierte Wahrscheinlichkeiten mittels der Quotientendefinition ausschreiben kann, können die absoluten Wahrscheinlichkeiten für eigene Handlungen ins Spiel kommen. Wir wollen nun die bereits in Kapitel 2 Abschnitt 4 angesprochenen Aspekte etwas ausführlicher darstellen.

Werden Sie für die Berechnung des erwarteten Nutzens tatsächlich benötigt? Dies ist nicht der Fall. Wie schon aus unserer Diskussion in Kapitel 2 Abschnitt 4 hervorging, muss, wenn man sich allein für die bedingte Wahrscheinlichkeit interessiert, der konstituierenden Bedingung keine Wahrscheinlichkeit zugewiesen werden, obwohl das prinzipiell möglich ist. Um als rationaler Entscheider zu gelten, muss man jedoch eine konsistente Wahrscheinlichkeitsbewertung abgeben. Dies wird dann mit „lückenhaften Wahrscheinlichkeitszuweisungen" (gappy assignments) erreicht, welche zu einer kompletten Wahrscheinlichkeitsbewertung, welche als Beschränkungen die Werte der bedingten Wahrscheinlichkeiten hat, ergänzt werden können[9].
Dementsprechend ist es weitgehend korrekt, wenn etwa Spohn in [214] behauptet, dass solche Wahrscheinlichkeiten in den bisher geschilderten Standardentscheidungsszenarien keinen sinnvollen Zweck erfüllen; allerdings ist diese Behauptung insoweit zu qualifizieren, als dass der eigentliche Diskussionsgegenstand nicht das Zustandekommen einer Handlung ist, sondern das Fassen der zugehörigen Absicht. Schon Descartes stellt in „Discours de la méthode" [49] fest, „dass nichts völlig in unserer Macht steht außer unseren Gedanken". Es kann wohl nicht bestritten werden, dass es Handlungen gibt, die man trotz vorhandenem Willen nur schwer durchführen kann: zum Beispiel bei einer sportlichen Leistung an seine körperlichen Grenzen zu gehen oder sich überwinden, etwas Unangenehmes trotz einer bestehenden Notwendigkeit zu tun. Aber es gibt nicht nur mit der Person an sich verbundene Schwierigkeiten,

[8] Diese wurden bereits in Kapitel 4 Abschnitt 1 erwähnt. Nach Ramsey wurden sie in vielerlei Variationen präsentiert, unter anderem von Savage [190], Suppes [226] und Jeffrey [113].

[9] Dieser Vorschlag wurde von Spohn in [214] gemacht.

sondern auch externe Umstände können eine intendierte Handlung verhindern. Die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten sind im entscheidungstheoretischen Rahmen zu beachten. In der Entscheidungstheorie ist grundsätzlich die Differenzierung zwischen kontrollierbaren und lediglich beeinflussbaren Faktoren zu treffen. Zu Ersteren zählt nur die eigene Wahl und zu Letzteren die Umsetzung der intendierten Aktion und die Manifestation der Begleitumstände. Demnach wäre es angebrachter, die Wahrscheinlichkeiten $P(W \cap A|I)$ statt $P(W|A \cap I)$ (W stellt eine mögliche Welt, A eine Handlung und I eine zugehörige Absicht dar) zu betrachten, weil das Zustandekommen einer intendierten Handlung nicht immer selbstverständlich ist. Da sich aber für gewöhnlich die in Frage kommenden Handlungen mit einem Mindestmaß an Aufwand verwirklichen lassen und somit $P(A|I)$ ungefähr eins ist, wird diese Unterscheidung oft berechtigterweise vernachlässigt[10].
Können sie von dem epistemischen Subjekt überhaupt erfasst werden? Möglicherweise besteht hier ein Konflikt, da eigene Handlungen im Zentrum von praktischen Erwägungen (practical deliberation) stehen und deshalb nicht vorausgesagt werden können. Diese Befürchtung ist aber unbegründet, da erstens der Wahrscheinlichkeitsbegriff ohne Einschränkung anwendbar ist und zweitens Menschen wohl über ein „modulares Bewusstsein" verfügen[11], welches sie unterschiedliche Rollen wahrnehmen lässt. Wahrscheinlichkeiten für eigene Handlungen können von einer Person in ihrer kognitiven Kapazität grundsätzlich erfasst werden („Glaubensmodul"); in ihrer Rolle als Entscheider sind sie aber üblicherweise ausgeblendet („Wahlmodul"). Allerdings gibt es darüber hinaus Behauptungen, dass diese Glaubensgrade trotz ihrer prinzipiellen Erfassbarkeit nicht konsistent definiert werden könnten, was äußerst schwerwiegende Konsequenzen hätte. Rabinowicz trägt in [179] die folgende Argumentation vor, welche zeigt, dass sich die Unmöglichkeit der Zuweisung von Wahrscheinlichkeiten für eigene Handlungen auf weitere Ereignisse ausbreitete. Es gibt Ereignisse B, die durchaus von Handlungen, zwischen denen ein Entscheider eine Wahl treffen muss, abhängen. Es sei A eine solche Handlung. Mit Hilfe der Quotientenformel für bedingte Wahrscheinlichkeiten lässt sich die Beziehung $P(A) = [P(B) - P(B|\overline{A})]/[P(B|A) - P(B|\overline{A})]$ herleiten[12]. Angenommen, man hätte Wahrscheinlichkeiten für B unter den verschiedenen Bedingungen, so hätte man auch eine Wahrscheinlichkeit für A, was aber der anfänglichen Feststellung widerspräche. Demnach würde sich die Unmöglichkeit der Zuweisung von Wahrscheinlichkeiten für eigene Handlungen auf weitere Ereignisse ausbreiten, die von dieser Handlung abhängen.
Ein Argument für die Unmöglichkeit der Definition von Glaubensgraden für eigene Handlungen wurde von Spohn in [214] angedeutet und von Rabinowicz in [179] detailliert ausgearbeitet[13]. Wir geben davon eine Kurzfassung. Man nehme an, die

[10] $P(A|I)$ ist gerade der Quotient aus $P(W \cap A|I)$ und $P(W|A \cap I)$.

[11] Hierbei handelt es sich um eine Theorie aus der Kognitionswissenschaft (ein Überblick findet sich unter www.u.arizona.edu/chalmers/biblio/5.html).

[12] Der Umstand, dass B von A abhängt, stellt sicher, dass hier nicht durch null geteilt wird.

[13] Leider präsentiert er zuerst eine unausgegorene Version, die eine Annahme darüber beinhaltet, dass der Entscheider „sicher" im Sinne von voller Wahrscheinlichkeit sei, was er tun werde.

Wahrscheinlichkeit einer Handlung habe einen bestimmten Wert. Wird jetzt eine Wette auf diese Handlung angeboten, so erhöht sich die Wahrscheinlichkeit, da ceteris paribus eine Ausführung mehr Vorteile mit sich bringt. Das hieße dann aber, dass die Wahrscheinlichkeit gar nicht wohldefiniert sei, wenn sie durch ein Wettangebot, welches sie gerade messen soll, verändert wird. Dieses Argument ist aber keineswegs überzeugend. Wie wir bereits in Kapitel 4 Abschnitt 1 sahen, wird hier vielmehr die operationalistische Definition der Glaubensgrade kritisiert, anstatt deren Nichtexistenz zu zeigen[14].

In dem Zusammenhang, dass einer eigenen Handlungen wie jedem anderen Ereignis auch eine Wahrscheinlichkeit zukommen kann, muss bemerkt werden, dass die von Rabinowicz in [179] als „starke These" bezeichnete Ansicht von Levi [137] und Spohn [214], wonach ein Entscheider in einer Entscheidungssituation den Alternativen, die ihm zur Wahl stehen, keine Wahrscheinlichkeiten zuweist, für Standardentscheidungssituationen trotz der Unzulässigkeit des Wettarguments gerechtfertigt ist, weil Wahrscheinlichkeiten für eigene Handlungen wie oben erwähnt nicht explizit in die Berechnung des erwarteten Nutzens eingehen. Sie erfüllen in dem Standardszenario, wo diese Wahrscheinlichkeiten keine weiteren Auswirkungen haben, keinen sinnvollen Zweck. Allerdings ist es denkbar, dass Wahrscheinlichkeiten für eigene Handlungen in modifizierten Entscheidungsszenarien eine hilfreiche Rolle spielen könnten. Rabinowicz nennt in [179] zwei Aspekte diesbezüglich.
Erstens kann durch sie der Entscheidungsprozess effizienter gestaltet werden: Angenommen, man hat es bei einem komplizierten Entscheidungsmodell mit einer Unmenge von Optionen zu tun und nicht ausreichend Zeit, alle bezüglich ihres erwarteten Nutzens zu prüfen, dann kann man eine Vorabbewertung der Handlungen abgeben, um nicht unnötigen Aufwand für Optionen zu betreiben, die voraussichtlich nicht zur Geltung kommen. Dieser Aspekt ist definitiv nützlich, aber natürlich ist er rein praktischer Natur.
Zweitens können mit Hilfe von Wahrscheinlichkeiten für eigene Handlungen verschiedene epistemische Dynamiken sichtbar gemacht werden. Rabinowicz führt das Beispiel des „Tods in Damaskus" an, welches auf Gibbard und Harper [78] zurückgeht; dort kann damit die Instabilität der Entscheidungssituation beschrieben werden. Der Tod erwartet eine Person in einer von zwei Lokalitäten, X oder Y, in Damaskus. Um des Arguments willen wollen wir davon ausgehen, dass sie definitiv eine dieser beiden Orte aufsuchen muss. Die Person hat ein profundes Interesse daran, ihre Verabredung mit dem Tod zu verschieben, jedoch wird diese Absicht dadurch erschwert, dass der Tod ein guter Kenner von menschlichen Gedankengängen ist.

Er korrigiert dies dann aber in der zweiten Version dahingehend, dass die Annahme nur von einer gewissen Wahrscheinlichkeit ausgeht. Wie wir schon mehrfach erwähnten, ergeben triviale Wahrscheinlichkeiten nur für Tautologien und logische Widersprüche Sinn. Durch die nötige Modifikation des Arguments wird dies wieder erneut verdeutlicht.

[14] Rabinowicz glaubt die Ausbreitung der Nichtexistenz der Glaubensgrade ohne die Aufgabe des Wettarguments eindämmen zu können, indem er die an dieser Stelle etwas verwirrende Unterscheidung zwischen zukünftigen und direkt bevorstehenden Handlungen einführt. Jedoch liegen beide in der Zukunft.

Ihre Wahrscheinlichkeit, Lokalität X aufzusuchen, sei anfänglich hoch, weil sie sich dort sicherer wähnt (etwa weil sich X in einem besseren Stadtviertel befindet). Nun überlegt sich aber die Person, dass der Tod das vorausahnen kann und genau dort wartet. Dementsprechend möchte sie lieber Lokalität Y aufsuchen, was ihre Wahrscheinlichkeit, dies zu tun, erhöht. Allerdings kommt ihr dann die Einsicht, dass das auch von Gevatter Tod antizipiert hätte werden können, weshalb das Spiel von vorne beginnt.
Der zweite genannte Vorteil könnte für theoretische Überlegungen durchaus bedeutsam sein, aber bei dem Beispiel handelt es sich lediglich um eine Veranschaulichung, welche an sich keinen konstruktiven Beitrag zur Lösung des Problems leistet[15]. Insofern bleibt zunächst die Frage offen, ob es einen wichtigeren theoretischen Grund gibt, solche Wahrscheinlichkeiten einzubeziehen.

5.1.3 Zyklische Präferenzen

In der Bayesianischen Entscheidungstheorie wird Rationalität mit der Maximierung des erwarteten Nutzens gleichgesetzt. Diese Forderung leitete man daraus ab, dass sich die Präferenzen für die Handlungen transitiv verhalten. Aber wieso ist es sinnvoll, davon auszugehen? Wenn man an Spiele wie etwa Stein-Schere-Papier denkt, so stellen sich die Fragen, welche Konsequenzen es haben kann, wenn die Präferenzen wie in diesem Spiel zyklisch angeordnet sind[16], und unter welchen Voraussetzungen es möglich ist, Präferenzen auf eine eindimensionale Skala zu projizieren.

Zur Erörterung der ersten Frage wollen wir annehmen, dass die Präferenzen eines Entscheiders bezüglich der mit x, y, z benannten Gegenstände zyklisch angeordnet sind, also dass mit der nichttransitiven Präferenzordnung[17] $<$ die folgende Beziehung gilt: $x < y < z < x$[18]. Es sei weiterhin angenommen, dass für jede dieser Präferenzen ein Geldbetrag α_i existiere, dessen Abgabe die Präferenz nicht beeinträchtigt, also dass der Entscheider bereit ist α_i zu zahlen, um den Tausch zu dem höher eingestuften Gegenstand vollführen zu können. Diese Annahme ist nicht allzu schwerwiegend, da man, falls sich die Präferenzen nicht deutlich unterscheiden, hinreichend kleine Geldbeträge wählen kann. Ist die kleinste Währungseinheit nicht klein genug, so stelle man sich das Szenario wieder in einer virtuellen Währung vor, um sich die Konsequenzen zu veranschaulichen. Die Bildung des Minimums der α_i führt dann zu einem einheitlichen Betrag α, der für alle Stufen gilt. Nun kann ein Händler

[15] Eine rationale Lösung im Sinne der Spieltheorie (auf diese gehen wir detaillierter in Abschnitt 4 dieses Kapitels ein) besteht im Mischen der Strategie, also dass man einen objektiven Zufallsmechanismus darüber entscheiden lässt, was zu tun ist. Ähnlich ist hierzu das Papier-Schere-Stein-Spiel, das genauso gelöst wird.

[16] Natürlich sind auch größere Zyklen mit mehr als drei Gliedern denkbar, aber wir beschränken uns aus Gründen der Übersichtlichkeit auf den kleinsten nichttrivialen Fall.

[17] Hierbei bedeutet $x < y$, dass der Entscheider bei einer Wahl zwischen den beiden Gegenständen y präferiert.

[18] Ein Beispiel, wie sich so etwas in einer Alltagssituation ergeben kann, ist das Christbaumschmuckbeispiel von Schumm [195].

dem Entscheider sukzessive die Angebote präsentieren, welche auf den Ungleichungen $x < y - \alpha$, $y < z - \alpha$, $z < x - \alpha$ basieren. Wenn der Entscheider ungehemmt seinen Präferenzen folgt, gelangt er bei Start mit x wieder am Ausgangszustand an, wobei er um 3α erleichtert wurde. Das stempelt ihn als „Geldpumpe" ab[19], da dieses Verfahren aufgrund gleichen Anfangs- und Endzustandes wie bei einer Pumpe prinzipiell beliebig oft wiederholbar ist; allerdings kann es natürlich sein, dass sich der Entscheider nach der ersten Runde weiteren Aktionen verweigert.
An dieser Stelle sei noch erwähnt, dass für ein derartiges Ausbeutungsszenario nicht allein strikte Präferenzen vorzuliegen brauchen, denn es genügt, wenn die Transitivität unter Verwendung von Äquipräferenzen verletzt ist. Die beschriebene Situation lässt sich auf die Anordnungen $x \approx y$, $y \approx z$, $z < x$ und $x \approx y$, $y < z$, $z < x$ in analoger Weise übertragen: Für eine strikte Präferenz kann ein Händler α kassieren und der Tausch bezüglich äquipräferierter Objekten wird mit einem Bruchteil davon herbeigeführt.
Nachdem wir nun die Konsequenzen gesehen haben, ist eine derartige Präferenzordnung als rational zu bezeichnen? Sicherlich nicht in einem praktischen Sinne, falls dem Entscheider Geld etwas bedeutet und er nicht bereit ist, den reinen Vorgang des Tauschens mit 3α zu bezahlen. Man könnte behaupten, dass das beschriebene Szenario nur möglich ist, wenn der Entscheider nicht weiß, was ihm bevorsteht. Denn wenn er das Geldpumpenprinzip kennt, so könnte er beispielsweise aufhören, nachdem er y ertauscht hat[20]. Trotzdem muss man sich dann fragen, welchen Wert eine solche Präferenzordnung in einem praktischen Sinne haben kann, wenn man sich nicht danach richtet. Man könnte etwa meinen, dass es rational sei, nur die einzelnen Ungleichungen $x < y - \alpha$, $y < z - \alpha$, $z < x - \alpha$ zu vertreten, ohne diesen *direkt* nacheinander Folge zu leisten; aber dies greift zu kurz, da allein eine zeitliche Distanz nichts an der Konsekutivität der Handlungen ändert. Daher heißt das im Endeffekt nichts anderes, als dass nur zwei Ungleichungen zu akzeptieren sind, da die Hinzunahme der dritten unwillkommene Konsequenzen hat. Letztendlich hat man dann eine Präferenz, die niemals zur Geltung kommt, was bedeutet, dass diese Präferenzordnung nicht für praktische Zwecke, also als Handlungsgrundlage, taugen kann.
Eine zyklische Anordnung muss aber nicht in einem epistemischen Sinne irrational sein, da solche Verhältnisse einfach existieren können; wenn es zu solch einer Konstellation kommt, so ist sie eine Tatsache. Neben dem Schmuckbeispiel von Schumm [195] denke man einfach an einen sportlichen Vergleich zwischen drei Mannschaften, bei dem jedes Team nur einen Sieg einfährt. Da man einen solchen Zustand aus praktischen Gründen vermeiden möchte, überlegt man sich oft die Kriterien, unter denen diese Anordnung zustande kam, geeignet abzuändern. Etwa versucht man bei sportlichen Vergleichen, wo solche Situationen doch häufig anzutreffen sind und man nur einen Preis zu vergeben hat, unter Heranziehung weiterer Aspekte, wie zum Beispiel erzielte Punkte, diese Struktur aufzulösen, um eine lineare Anordnung

[19]Diese Bezeichnung wurde erstmals in [42] erwähnt.
[20]Diese Voraussicht des Entscheiders lässt sich etwa mittels Rückwärtsinduktion begründen [178].

zu erhalten, welche eine Mannschaft eindeutig auszeichnet.
Doch nun zurück zu dem Geldpumpenszenario. Sind die Präferenzen linear geordnet, so ist eine derartige Ausbeutung ausgeschlossen; zumindest wenn es sich um einen einzelnen Entscheider handelt. Dies ist für Gruppen nicht der Fall: Auch wenn alle Personen einer Gruppe lineare Präferenzen bezüglich dreier Optionen haben, kann es vorkommen, dass die Gruppe insgesamt trotzdem eine zyklische Präferenzstruktur aufweist. Diese Beobachtung wurde erstmals von Condorcet [40], welcher ein Interesse an politischen Entscheidungsprozessen hatte, formal präzisiert, weshalb das folgende Szenario auch als „Condorcet Paradox" bekannt ist[21]. Drei Personen haben als lineare Präferenzen bezüglich der mit A, B, C bezeichneten Gegenstände $A < B < C$, $B < C < A$ und $C < A < B$. Angenommen, man würde A an die erste Stelle der Gruppenpräferenz setzen, so könnte man argumentieren, dass dies eigentlich B zustehe, da zwei Mitglieder B gegenüber A bevorzugen. Setzte man jetzt B an die vorderste Position, so könnte man sich auf die gleiche Art davon überzeugen, dass insgesamt C wünschenswerter erscheint. Und letztendlich kann man dann wieder eine Ersetzung durch A rechtfertigen, womit man erkennt, dass sich dies beliebig weiterführen lässt und eine zyklische Präferenzstruktur vorliegt.
Für einen einzelnen Entscheider ist eine lineare Skala aber nicht die einzige Möglichkeit, wie solche Ausbeutungen vermieden werden können, denn es gibt allgemeinere nichteindimensionale Strukturen, auf die das zutrifft. Man stelle die für die Präferenzordnung in Frage kommenden Objekte mittels Knoten eines Graphen dar, wobei Präferenz einer gerichteten und Äquipräferenz einer ungerichteten Kante entspricht. Es müssen nicht alle Objekte miteinander vergleichbar sein, was heißt, dass nicht zwischen allen Knoten eine Kante existieren muss. Falls in diesem Graphen dann keine Zyklen mit einheitlicher Durchlaufrichtung[22] existieren, so ist eine Geldpumpenaktion ausgeschlossen, da man, egal welchen Pfad man innerhalb des Graphen beschreitet, nie wieder an die Ausgangsposition kommt, wenn man die Richtung der Kanten respektiert[23]. Man kann die Forderung sogar noch dahingehend abschwächen, dass man triviale Zyklen, die nur aus Äquipräferenzen bestehen, erlaubt, weil man bei diesen nicht bereit ist, für einen Durchlauf zu zahlen.

Auch wenn nichteindimensionale Präferenzstrukturen durchaus eine Ausbeutung vermeiden können, so interessiert uns schließlich eine Antwort auf die zweite anfänglich gestellte Frage, unter welchen Voraussetzungen an die Präferenzordnung man die Objekte linear anordnen kann, da eine solche Struktur zusätzlich eine eindeutige Auszeichnung eines Gegenstands zulässt. Gerade in unserer Welt mit ihrer naturwissenschaftlich geprägten Auffassung erscheint es geradezu selbstverständlich, davon ausgehen zu können, dass sich alles auf einer Skala messen lässt.

---

[21] Dieses wird fälschlicherweise oft als statistisches Paradox bezeichnet, jedoch wird hier weder ein induktiver Schluss vollzogen noch eine wahrscheinlichkeitstheoretisch relevante Kenngröße berechnet.

[22] Ungerichtete Kanten können in beide Richtungen durchlaufen werden.

[23] Es können ohne Beeinträchtigung Zyklen ohne einheitliche Richtung wie etwa $a < b$, $a < c$, $b < c$ erlaubt werden.

Wenn in der Präferenzordnung alle Objekte miteinander vergleichbar sind und keine Zyklen existieren, so kann man sie linear anordnen. Nehmen wir zuerst an, dass es keine Äquipräferenzen gebe. Man beginnt mit zwei beliebigen Gegenständen a, b und positioniert sie entsprechend ihrer Ordnung, etwa $a < b$, auf einer Skala. Wird nun ein weiteres Objekt c hinzugenommen, so kann es wegen der Nichtexistenz von Zyklen im Vergleich mit a und b nur drei statt vier Möglichkeiten geben: $c > a, c > b$; $c < a, c < b$ und $c > a, c < b$. In den ersten beiden Fällen wird c oberhalb beziehungsweise unterhalb von a sowie b platziert und im letzten Fall dazwischen. Für das dritte Objekt war es noch ziemlich offensichtlich, aber was ist, wenn ein neuer Gegenstand in eine Skala mit n $(n > 2)$ Objekten einzufügen ist? Wieso lässt sich die Position eindeutig spezifizieren? Die Fälle, in denen alle n Objekte entweder größer oder kleiner als das neue Objekt sind, stellen trivialerweise kein Problem dar, weshalb wir davon ausgehen, dass die Beziehungen zu den vorhandenen Gegenständen unterschiedlich sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit trifft das auf zwei auf der Skala benachbarte Gegenstände x und y mit $x < y$ zu. Es ist unmittelbar klar, dass für das neue Objekt z nur $x < z < y$ gelten kann. Jetzt müssen dann aber schon alle Objekte unterhalb von x beziehungsweise oberhalb von y die gleiche Größenbeziehung wie x beziehungsweise y zu z haben, da sonst ein Zyklus vorläge, was zeigt, dass wir z problemlos integrieren können. Auch wenn wir jetzt noch Äquipräferenzen zulassen, können wir weiterhin eindeutig eine Skala generieren. Bei einer Äquipräferenz müssen die beiden Gegenstände an die gleiche Stelle gesetzt werden; denn würden sie von irgendeinem anderen Objekt unterschiedlich behandelt, so läge ein Zyklus mit einheitlicher Durchlaufrichtung vor. Dies zeigt, dass die Abwesenheit von Zyklen schon eine lineare Anordnungen garantiert, wenn alle Objekte miteinander verglichen werden können.

Um nochmals abschließend die beiden eingangs gestellten Fragen zusammenfassend zu beantworten: Zyklische Überlegenheitsverhältnisse sind durchaus in der Welt anzutreffen, doch sollte man von zyklischen Präferenzen als Grundlage für Handlungen Abstand nehmen, da sie zu irrationalem Verhalten führen. Falls alle Objekte, die für eine Präferenzzuweisung in Frage kommen, miteinander in Beziehung gesetzt werden können, so ist die Anordnung auf einer linearen Skala die einzig rationale Bewertung für praktische Zwecke. Sieht man aus irgendwelchen Gründen davon ab, alle Objekte miteinander zu vergleichen, so sind auch allgemeinere Präferenzstrukturen in diesem Sinne als rational zu charakterisieren.

5.1.4 Nichtprobabilistische Entscheidungsregeln

Das oberste Prinzip der Bayesianischen Entscheidungstheorie besteht in der Maximierung des erwarteten Nutzens, welcher sich mit Hilfe von Wahrscheinlichkeiten berechnet; insofern handelt es sich hier um ein probabilistisches Entscheidungskriterium. Auch wenn einem dies aufgrund omnipräsenter Wahrscheinlichkeiten absolut selbstverständlich erscheinen mag, so ist dennoch zu fragen, welche nennenswerten nichtprobabilistischen Entscheidungskriterien existieren und wann beziehungsweise warum man sich an diese halten sollte. Wir wollen nun zwei der bekanntesten Alternativen kurz darstellen.

Zunächst besprechen wir die „Maximin-Entscheidungsregel". Hier wird zuerst für jede Handlung das schlechteste Resultat bestimmt und dann wird diejenige Aktion gewählt, welche bezüglich dieser Ergebnisse am besten abschneidet[24]. Der Vorteil dieses Vorgehens besteht offensichtlich darin, dass der garantierte Gewinn so hoch wie möglich ausfällt. Diese Entscheidungsregel kann für risikoscheue Entscheider angemessen sein, allerdings führt sie in einigen Szenarien zu äußert fragwürdigen Empfehlungen. Man betrachte etwa das folgende Beispiel. Man wählt eine von zwei Optionen, A oder B, und wirft einen Standardwürfel. Falls man Option A wählt, so erhält man bei einer Eins zwei Währungseinheiten und in den restlichen Fällen drei. Entscheidet man sich stattdessen für Option B, so erhält man bei einer Eins eine Währungseinheit und sonst eine Million. Für Anhänger der Maximinregel ein klarer Fall: Option A ist die richtige, da man garantiert zwei Währungseinheiten statt einer ausgezahlt bekommt. Das Problem ist hier, dass die Maximinregel nur einseitig das Sicherheitsniveau erhöht, aber auf der anderen Seite mögliche Gewinne absolut übersieht. Die Stärke dieser Entscheidungsregel zeigt sich ganz klar, wenn die möglichen unwillkommenen Konsequenzen so gravierend sind, dass man sie unter allen Umständen vermeiden möchte. Man stelle sich das gegebene Beispiel so abgeändert vor, dass man bei Option B bei einer Eins fünf Millionen zu zahlen habe. Dann scheint es die praktische Rationalität zu gebieten, von der Option B Abstand zu nehmen.

Nun erläutern wir die „Minimax-Entscheidungsregel"[25], wobei wir zur Veranschaulichung annehmen, dass die verschiedenen Begleitumstände für die Handlungen von einem übergreifenden Weltzustand herrühren[26]. Dabei geht es nicht darum, die maximalen Nutzenswerte der Konsequenzen zu minimieren, was ja offensichtlich widersinnig wäre, sondern stattdessen wird dies mit einer anderen Größe, dem sogenannten „regret", getan. Der Regret bezüglich einer Handlung und einem Begleitumstand, $r(a_i, b_{ij})$, wird berechnet, indem man den dafür vorgesehenen Nutzenswert von dem Maximum der Nutzenswerte aller mit diesem Weltzustand konsistenten Konsequenzen, welche von unterschiedlichen Handlungen stammen, abzieht. Damit soll der Regret die Spanne messen, welche sich in einem Weltzustand zwischen der ausgesuchten und der besten Konsequenz auftut. Wenn nun noch das Maximum über alle Weltzustände gebildet wird, dann erhält man die größte Spanne dieser Art: $R(a_i) = \max_j r(a_i, b_{ij})$. Die Minimaxregel schreibt jetzt vor, die Aktion zu wählen, welche diese maximale Diskrepanz minimiert. Wozu kann ein derartiges Vorgehen gut sein? Hat man etwa erreicht, den Regret R auf einen Wert x zu minimieren,

---

[24] Daher stammt auch die Bezeichnung „Maximin", da das Maximum der minimalen Nutzenswerte bestimmt wird.

[25] Sie wurde von Savage [190] eingeführt.

[26] Also dass es für jedes a_i gleich viele $b_{i,j}$ gibt und sich diese einheitlich auf einen Weltzustand zurückführen lassen, der über den zweiten Index entscheidet. Dies war beim gerade gegebenen Beispiel der Fall.

so bedeutet das, dass sich das beste Resultat von dem der gewählten Aktion nie um mehr als x Einheiten unterscheidet. Damit soll in gewisser Weise das bekannte „Hätte ich doch lieber die Alternative ausgesucht!" -Gefühl auf ein Mindestmaß begrenzt werden. Dies ist der Vorteil dieser Entscheidungsregel, aber es muss festgestellt werden, dass dieses Vorgehen den Weg zum bestmöglichen Resultat versperren kann, was wir an einem Beispiel deutlich machen wollen. Option A liefere für zwei mögliche Weltzustände die in Nutzenseinheiten gemessenen Konsequenzen -5, 50; bei Option B präsentieren sich diese als 25, 30. Der Regret R ist 30 in A und 20 in B. Insofern wird eine Handlung nahegelegt, die als „mittelmäßig" zu charakterisieren ist: In jedem Fall liefert sie solide Ergebnisse, aber der Maximalgewinn ist einfach ausgeschlossen.

Damit erfüllen nichtprobabilistische Entscheidungsregeln einen sinnvollen Zweck, wenn es darum geht, den Extremwert einer bestimmten Kenngröße, nach welcher eine Entscheidung als gut eingeschätzt wird, mit Sicherheit, also unabhängig davon, welche Begleitumstände eintreten, festzulegen. Allerdings zieht die vollständige Ignoranz von probabilistischen Überlegungen die Verkennung der Realität insofern unweigerlich nach sich, als dass alle möglichen Begleitumstände gleich bewertet werden[27], was zwingend zu einer Über- und Unterschätzung führt.

Es sei noch darauf hingewiesen, dass Halpern, der in [95] die gemeinsamen Eigenschaften unterschiedlicher Darstellungen von Daten, wie wir sie in Kapitel 3 Abschnitt 1 kennengelernt haben, mittels sogenannter „Plausibilitätsmaße" zu abstrahieren versucht, dort auch eine verallgemeinerte Form des erwarteten Nutzens definiert; sie stellt nicht nur für alternative Wahrscheinlichkeitskonzepte ein Analogon zur üblichen Integration dar, sondern vereint auch die beiden besprochenen nichtprobabilistischen Entscheidungsregeln als Spezialfälle der Maximierung des verallgemeinerten erwarteten Nutzens. Dadurch wird hervorgehoben, dass es bei Entscheidungsregeln stets irgendeine Größe zu maximieren gilt, wobei sich der Einfluss von wahrscheinlichkeitstheoretischen Überlegungen variabel gestalten lässt, indem man das zugehörige Plausibilitätsmaß entsprechend wählt.

Eine Frage, welche doch eine gewisse praktische Relevanz in sich trägt, besteht darin, ob man rational an der Lotterie teilnehmen könne, wo doch jeder Mensch um die derart schlechten Chancen weiß, die dann zu einem negativen erwarteten Nutzen führen. Auch wenn man ein gut geformtes Verständnis von Wahrscheinlichkeiten hat, ist einem damit die Teilnahme an der Lotterie aus vernünftigen Erwägungen heraus verwehrt? Die Antwort lautet „nein". Zunächst einmal ist festzustellen, dass sich bei einem genügend hohen Jackpot eine Teilnahme auch mit Hilfe des Erwartungswertes begründen lässt; allerdings stellt dies doch eher eine Ausnahme dar. Ansonsten ist eine Teilnahme einfach aus dem Grund gerechtfertigt, dass in dem Szenario eine starke Asymmetrie bezüglich des potentiellen Geldflusses besteht. Im Standardfall wird nur mit einem geringen Einsatz gespielt, was bedeutet, dass sich

[27] Hiermit ist gemeint, dass *allein* deren Möglichkeit zählt; wie „wahrscheinlich" die Begleitumstände sind, interessiert nicht.

für eine Person, die mit ausreichend Geldmitteln ausgestattet ist, ein Verlust als vernachlässigbar präsentieren würde. Dagegen ist der Möglichkeit, den Hauptgewinn zu erreichen, eine besondere Bedeutung beizumessen, da es sich bei diesem um eine beträchtliche Summe handelt. Drastischer formuliert: Ein einmalig verlorener Einsatz ist kaum spürbar, der Hauptgewinn dagegen um so mehr. Insofern ist eine nicht zu häufige Teilnahme am Lotto durchaus vertretbar, da sich Verluste nur mikroskopisch bemerkbar machen, aber der Gewinn makroskopisch ausfallen kann. Es geht nicht darum, entsetzt festzustellen, dass man einige Währungseinheiten verloren hat; vielmehr ist entscheidend, dass man durch eine kaum bemerkbare Unannehmlichkeit die Chance auf etwas weit Bedeutenderes hat. Diese Feststellung ermöglicht es, rational betrachtet, die Teilnahme am Lotto zu erwägen. Und genau diese Überlegung wird durch die Minimax-Entscheidungsregel eingefangen: Die Teilnahme an der Lotterie minimiert den Regret, welcher sich ansonsten in Millionenhöhe befindet[28]. Natürlich wird dadurch keinesfalls eine beliebig häufige Teilnahme gerechtfertigt, da damit die Asymmetrie bezüglich des Geldflusses partiell verloren geht. Eine geeignete Beschränkung ist durch Festsetzung eines absoluten Höchstbetrages an Einsätzen zu wählen.

[28] Dagegen empfiehlt die Maximinregel nicht teilzunehmen, da man ja möglicherweise den geringen Einsatz verlieren könnte. Schon in der Besprechung der Regel sagten wir, dass man sie nicht sinnvoll auf lottoartige Fälle anwenden kann.

5.2 Das Newcomb-Problem

Eines der schwierigsten Probleme der Entscheidungstheorie stellt das sogenannte „Newcomb-Problem" dar, welches von dem Physiker Newcomb erfunden und zum ersten Mal von Nozick in [164] präsentiert wurde. Es geht um das folgende Szenario: Eine Person muss entscheiden, ob sie von zwei Schachteln, S_1 und S_2, nur S_1 oder beide nimmt; in S_2 befinden sich garantiert 1000 Dollar und in S_1 unter Umständen sogar eine Million. Die Schwierigkeit liegt nun darin, dass der Inhalt von S_1 von einem kompetenten Spielleiter festgelegt wurde, bei dem es sich je nach Präsentation des Problems um einen Menschen, der den Entscheider gut kennt, einen Meisterpsychologen oder gar ein übermenschliches Wesen handelt. Gemeinsam haben sie die Eigenschaft, dass sie die Handlungen des Entscheiders sehr gut antizipieren können. Vermutete der Spielleiter, dass der Entscheider nur S_2 nehmen würde, so platzierte er eine Million in ihr. Nahm er stattdessen an, dass die Person gierig sein würde, so ließ er S_2 leer. Wie sollte sich nun jemand entscheiden, der vor der Wahl steht, nur eine Schachtel oder beide zu nehmen?

Es sollen zunächst zwei mögliche Antworten auf dieses Problem geschildert werden. Die Erste wendet naiv die Maximierung des erwarteten Nutzens an, wobei die Unsicherheit in der Situation bezüglich der Verlässlichkeit des Spielleiters besteht. Es sei p die Wahrscheinlichkeit, dass er den Entscheider korrekt einschätzt. Dann liefert die Berechnung des erwarteten Nutzens[29] für die Optionen A_1 und A_2, also eine Schachtel zu nehmen oder beide, $EU(A_1) = 10^6 p$ beziehungsweise $EU(A_2) = 10^6(1-p) + 10^3$. Diese beiden Werte sind identisch, wenn $p = 0,5005$ gilt. Demnach sollte man sich für A_1 entscheiden, falls man die Wahrscheinlichkeit für das richtige Raten überdurchschnittlich ansetzt, was nach der Beschreibung des Szenarios nicht abwegig ist[30].

Eine weitere „Lösung" besteht darin, einfach zu leugnen, dass es sich hierbei um ein Entscheidungsproblem handele. Diese Ansicht wird von Jeffrey in [115] und [116] vertreten. Sie ist dadurch begründet, dass in diesem Problem eine enorm starke Rückkoppelung zwischen der Absicht des Entscheiders und den Begleitumständen bestehe, weshalb man sich nicht in einer Situation befinde, um frei eine Entscheidung treffen zu können.

Tatsächlich ist aber keine dieser beiden Reaktionen angemessen. Vielmehr sollte man A_2 aus dem einfachen Grund wählen, dass man nicht vernünftig von Rückwärtskausalität ausgehen kann, auch wenn diese immer wieder gerne als theoretische Spielerei in den Raum gestellt wird. Demnach spielt es keine Rolle, ob der Spielleiter errät,

[29] Die Übersetzung in den Formalismus der Entscheidungstheorie mittels suggestiver Bezeichnungen lautet ausführlich $EU(A_1) = 10^6 P(S_1\,\text{voll}|A_1) + 0 \cdot P(S_1\,\text{leer}|A_1)$ und $EU(A_2) = (10^6 + 10^3)P(S_1\,\text{voll}|A_2) + (0 + 10^3)P(S_1\,\text{leer}|A_2)$. Der Einfluss der Handlungen auf die Begleitumstände wird mittels der Wahrscheinlichkeit p beschrieben.

[30] Würde man diese Art der Entscheidungsfindung auf das Problem des Tods in Damaskus anwenden, so erhielte man für beide Orte den gleichen erwarteten Nutzen, da diese völlig symmetrisch sind. Damit muss das oberste Prinzip der Entscheidung die Nichtvorhersehbarkeit sein, was mit dem sogenannten „Geheimhaltungsargument" von Morgenstern und VonNeumann konform ist, welches wir in Abschnitt 4 dieses Kapitels erläutern werden.

was der Entscheider tun wird, da zu dem Zeitpunkt, an dem die Entscheidung zu treffen ist, die Schachteln mit ihrem Inhalt schon aufgebaut sind und nicht mehr verändert werden. Insofern ist die Maximierung des Gewinns trivial durch Wahl von A_2 zu erreichen, was durch das sogenannte „sure-thing principle" beschrieben wird: Ist jede Handlung mit den gleichen möglichen Begleitumständen versehen und gestalten sich die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Welten unabhängig von der jeweiligen Aktion (also $P(w_{kj}|A_k) = P(w_{lj}|A_l)$ für verschiedene k, l), so ist diejenige Handlung zu wählen, die in den Nutzenswerten der Begleitumstände alle anderen Aktionen (vektorweise) dominiert[31]. Die Antwort von Jeffrey ist nicht wirklich befriedigend, da man eine genuine Entscheidung zu fällen hat; dies wird auch nochmals von Joyce in „Are Newcomb problems really decisions?" [119] betont. Es wäre doch sehr merkwürdig, einem Entscheidungsproblem einfach seinen Status abzuerkennen, wenn es zu schwierig geraten sollte.
Die eigentliche Schwierigkeit, warum das Newcomb-Szenario immer wieder zu Verwirrungen führt, liegt an dem Umstand, dass man geneigt ist, von dem Wiederholungsfall, also dem „Iterierten Newcomb-Problem", auszugehen. Dort haben die getroffenen Wahlen wirklich eine Auswirkung auf das Arrangement der Schachteln (in der nächsten Runde). In diesem Fall ist es auch rational, nur S_1 zu wählen, um sich für die nächste Wiederholung in eine bessere Ausgangsposition zu befördern[32].

Der Vollständigkeit halber wollen wir noch etwas detaillierter ausführen, woher Jeffreys Bedenken stammen[33]. In der von ihm formulierten Entscheidungstheorie spielen evidentielle Beziehungen die tragende Rolle, weshalb sie als „evidential decision theory" bezeichnet wird. Da die Wahrscheinlichkeiten $P(w_{ij}|A_k)$ dann evidentielle Zusammenhänge erfassen, werden einem vielversprechende Handlungen (auspicious acts) nahegelegt, welche Hinweise liefern, dass die gewünschten Konsequenzen eintreten. Der erste präsentierte Lösungsversuch verfährt nach dieser Rationalität. Für Jeffrey sind kausale Beziehungen nicht irrelevant für die Entscheidungsfindung, allerdings geht er davon aus, dass alle für eine Entscheidung notwendigen Informationen in nichtkausalen Propositionen kodiert werden können. Das Newcomb-Problem stellt ein Gegenbeispiel für die Angemessenheit seiner Theorie dar, da sie eine vielversprechende aber unwirksame Handlung empfiehlt, die keinerlei kausalen Beitrag zu den Resultaten liefert: Durch die Wahl von A_1 erhält man lediglich „gute Neuigkeiten", welche aber selber nichts zur Herbeiführung der Million tun. Auch Jeffrey erkannte, dass in diesem Fall die falsche Aktion ausgezeichnet wird. Er dachte aber, er könnte den Charakter seiner Theorie trotz des Newcomb-Problems beibe-

[31] Es war ein Fehler der frühen Entscheidungstheoretiker, zum Beispiel Savage [190], die Wahrscheinlichkeiten, welche beim erwarteten Nutzen eingehen, nur von den Begleitumständen, aber nicht den Handlungen abhängen zu lassen, wenn sich die möglichen Begleitumstände jeder Handlung gleichen (also wenn die b_{ij} für alle i identisch sind). Da die Aktionen aber sehr wohl einen Einfluss ausüben können, lassen sich absurde Szenarien konstruieren, welche zeigen, dass dadurch ein völlig überzogenes Sure-thing Principle etabliert würde.

[32] Wie oft und wann das zu tun ist, hängt von den genauen epistemischen Dynamiken ab.

[33] Wir geben die gelungene Analyse aus [119] wieder.

halten, indem er das „ratificationism" Postulat aufstellte[34]: Man soll für die Person wählen, die man erwartet zu sein, wenn man gewählt hat [35]. Dadurch sollten rein evidentielle Beziehungen zurückgewiesen werden. Jedoch präsentierte VanFraassen ein Gegenbeispiel[36], welches Jeffrey dann dazu veranlasste, sein Postulat aufzugeben[37]. Schließlich bestand Jeffreys letzte Möglichkeit, seine Theorie zu retten, in der Behauptung, dass es sich bei dem Newcomb-Problem um gar keine Entscheidungssituation handele, wonach es gar nicht als Gegenbeispiel in Frage komme.
Eine alternative Variante der Entscheidungstheorie, welche von der Grundüberzeugung ausgeht, dass kausale Beziehungen oberste Priorität genießen sollten, ist die sogenannte „Kausale Entscheidungstheorie" (causal decision theory)[38]. Um zu wissen, was ein Entscheider in einer bestimmten Situation tun soll, muss er sich im Klaren darüber sein, was er bezüglich der Wirkungen seiner Handlungen glaubt[39]. Insofern ist unsere präsentierte Lösung mit der Kausalen Entscheidungstheorie konform.

Abschließend sei noch darauf hingewiesen, dass das Newcomb-Problem eine auffallende Analogie zum „Gefangenen-Dilemma" aufweist[40]. Zwei Personen, die keine Möglichkeit haben, miteinander zu kommunizieren, müssen jeweils eine Wahl zwischen zwei Optionen A und B treffen; der Ausgang der Situation ist von deren kombinierter Entscheidung abhängig. Wählen beide A, so erhält jeder neun Nutzenseinheiten[41], tun sie dies für B, so handelt es sich nur um eine Nutzenseinheit. Es können natürlich auch gemischte Wahlen vorkommen: Bei diesen erhält die Person, die B wählte, zehn Einheiten und der andere Entscheider geht leer aus. Problematisch ist hier: Aus Dominanzüberlegungen ist man mit B in jedem Fall besser dran als mit A, weshalb man B wählen sollte; aufgrund der ähnlichen Beschaffenheit der Situationen der Entscheider ist aber davon auszugehen, dass von der zweiten Person

[34] Es macht Anleihen bei Eells [58] .

[35] In seiner Originalabhandlung [113] lautet die genaue Definition (bei ihm spielt die „Desirability" die Rolle der Utility): „A ratifiable decision is a decision to perform an act of maximum estimated desirability relative to the probability matrix the agent thinks he would have if he finally decided to perform that act.".

[36] Systematisch wird es in [118] dargestellt.

[37] Laut Joyce [119] geschah dies zu voreilig; allerdings würden dann kausale Beziehungen eine weit wichtigere Rolle spielen, als es Jeffrey für nötig hielt.

[38] Diese wird unter anderem von Gibbard/Harper [78], Cartwright [34], Skyrms [205], Lewis [140], Sobel [210], Armendt [3] und Joyce [118] vertreten.

[39] Das ist nur möglich, wenn der Entscheider sich entweder auf Propositionen mit explizitem kausalen Inhalt oder Formen der Glaubensänderung mit expliziten kausalen Beschränkungen bezieht. Darin besteht der Hauptunterschied innerhalb der Kausalen Entscheidungstheorie: Einige wie Sobel und Joyce bevorzugen es, die kausalen Elemente in die Überzeugungsänderung einfließen zu lassen, während andere wie Lewis, Skyrms und Gibbard/Harper die kausalen Anschauungen mit Hilfe von unkonditionierten subjektiven Wahrscheinlichkeiten für Propositionen mit kausalem Inhalt darstellen.

[40] Gelegentlich wird dieses auch als „Zwillings-Dilemma" bezeichnet. Während bei Ersterem die Nutzenswerte in Form von Strafverlängerung beziehungsweise -verkürzung zu deuten sind, kann man bei Letzterem wieder Geldbeträge nehmen.

[41] Die konkreten numerischen Werte wurden in dieser Präsentation willkürlich gewählt.

ebenfalls B gewählt wird, was dann in nur einer Nutzenseinheit statt etwa neun bei gemeinsamer Wahl von A resultiert. Das ist analog zu dem Newcomb-Problem, bei dem man auch mit einem solchen Konflikt konfrontiert ist: Ein an sich suboptimales Verhalten liefert gute Neuigkeiten über die Wahl der anderen Person. Auch beim Gefangenen/Zwillings-Dilemma besteht die rationale Lösung in der Wahl der dominierenden Option, da man keinerlei Möglichkeit hat, auf die Entscheidung des Gegenübers Einfluss zu nehmen[42]. Dies ändert sich natürlich sehr wohl bei der iterierten Variante, denn dann hat die getroffene Wahl wiederum einen Einfluss auf die Entscheidungen der nächsten Runde[43]. Sollte die zweite Person nämlich gutgläubig A gewählt haben, während die erste Person sich für die dominierende Handlung entschied, so wird sie beim nächsten Mal eher B bevorzugen, um nicht erneut leer auszugehen. In dieser Variante ist dann entsprechend wieder die nichtdominierende Option, also Kooperation, durchaus rational, da sonst sehr oft nur eine Nutzenseinheit ausgeschüttet würde, obwohl man doch neun haben könnte[44].

[42] Vgl. [214].

[43] Nach jeder Runde werden die Ergebnisse verkündet.

[44] Dies wird besonders treffend von Spohn in [218] formuliert, wo er im Rahmen strategischer Rationalität Kooperation rechtfertigt, da sonst „eine Spirale des Misstrauens erwüchse".

5.3 Die Bedeutung der epistemischen Zustände des Entscheiders

Im Leben hat man ständig Entscheidungen zu fällen. Standardmäßig gehen in die Wahl einer Aktion zu einem bestimmten Zeitpunkt nur Überlegungen ein, die sich mit der Situation bis zu diesem Zeitpunkt beschäftigen, allerdings stellt dies nur einen einfachen Fall dar. Es kann sehr wohl sein, dass eine bevorstehende Entscheidung zu Veränderungen führt, welche sich in weiteren Entscheidungssituationen niederschlagen. Dann ist es notwendig, dass man die Entscheidungssituation bis zu einem Zeitpunkt modelliert, der sich weiter in der Zukunft befindet. Dabei hat man dann eine Abfolge von Handlungen zu wählen, welche man üblicherweise als „Strategie" bezeichnet; insbesondere geht dann in die Wahl einer Aktion zu einem bestimmten Zeitpunkt die Kenntnis aller bis dahin verwirklichten Begleitumstände ein. Die Behandlung solcher Szenarien ergibt sich kanonisch aus dem bereits geschilderten Fall für eine einzige Aktion: Nun berechnet man den erwarteten Nutzen für Strategien.
Eine Komplikation, die hinzukommen könnte, besteht darin, dass sich der formale Rahmen der Entscheidungssituation ändert. Hat man die optimale Strategie identifiziert, so bedeutet das im Normalfall, dass man auch die entsprechenden Aktionen alle ausführen möchte. Jedoch kann sich etwa nach Tätigung der ersten Handlung ein neuer Faktor auftun, der entscheidungstheoretisch relevant ist. Dann ist es angebracht, die veränderte Ausgangslage, welche nicht mit der von dem Entscheider vermuteten Situation übereinstimmt, neu zu modellieren und eine Rekalkulation auszuführen. So etwas kann natürlich nach jeder Handlung notwendig werden. Für die folgende Darstellung wollen wir jedoch annehmen, dass dies nicht auftritt.

Die geschilderte Betrachtungsweise von strategischen Entscheidungssituationen basiert aber auf der impliziten Annahme, dass sich der epistemische Zustand des Entscheiders, welcher durch die von ihm zugewiesenen Wahrscheinlichkeiten und Nutzenswerte charakterisiert ist, nicht verändert. Der Wandel von epistemischen Zuständen hat besondere Brisanz vor dem Hintergrund der sogenannten „Konsistenzbeschränkung", nach welcher der Entscheider zu einem bestimmten Zeitpunkt immer diejenige Aktion vollführen wird, die ihm *zu diesem Zeitpunkt* optimal erscheint[45]. Diese Annahme mutet völlig harmlos an. Sie hat jedoch weitreichende Implikationen, wie das von Spohn [218] präsentierte Beispiel der „feuchtfröhlichen Dinnerparty" (boozy dinner party) verdeutlicht. Angenommen, man wird zu einer Dinnerparty auf dem Land eingeladen, auf der man mit hoher Wahrscheinlichkeit betrunken wird, und man fragt sich, wie man hin- und zurückkommen soll, da öffentliche Verkehrsmittel nicht zur Disposition stehen[46]. Man könnte selbst mit dem Auto fahren oder ein Taxi nehmen, aber je nach Art der Hinfahrt hat man unterschiedliche Möglichkeiten für die Rückfahrt. Lässt man sich von einem Taxi dorthin befördern,

[45] Wir erachten dieses Prinzip als äußerst sinnvoll. Es wurde zuerst von Strotz in [224] eingeführt.
[46] Um des Arguments willen sei die Möglichkeit zur Übernachtung ausgeschlossen.

so kann man nur auf diese Art wieder zurückkehren. Fährt man dagegen mit dem eigenen Auto, so kann man es entweder zur Heimkehr nutzen oder es stehen lassen und das Taxi nehmen. In letzterem Fall müsste man dann aber das Auto am nächsten Tag wieder irgendwie abholen. Vollführt man nun die Berechnung des erwarteten Nutzens mit den Wahrscheinlichkeitsmaßen, welche den entsprechenden epistemischen Zustand beschreiben[47], so bestünde die Handlungsempfehlung in der Hin- und Rückfahrt mit dem eigenen Auto. Das kommt erstens daher, dass das Taxi natürlich deutlich teurer als das eigene Auto ist, und zweitens von der Ansicht im angetrunkenen Zustand, dass die Risiken, von der Polizei angehalten zu werden oder einen Unfall zu bauen, trotz Alkoholgenuss vernachlässigbar sind. Diese Einschätzung hält aber einer nüchternen Evaluation keinesfalls Stand, da die Polizei gerade auf irreguläres Fahrverhalten aufmerksam wird und angetrunken sehr viele Unfälle verursacht werden. Damit würde man die ausgezeichnete Strategie nicht als vernünftig betrachten.

Die naheliegende Lösung besteht darin, für die Entscheidungsfindung seine anfängliche Einschätzung weiter zu verwenden. Dann ergibt sich unmittelbar aus der Maximierung des erwarteten Nutzes, dass es besser ist, mit dem Taxi hin und zurück zu fahren, um sich nicht unnötigen Gefahren auszusetzen und die enervierende Rückbeschaffung des eigenen Autos zu vermeiden[48]. In diesem Fall wird einem dann automatisch die Option der Rückkehr mit dem eigenen Auto versperrt. Insofern war es einfach, doch allgemeiner müssen noch weitere Bemühungen stattfinden: Nachdem mit der anfänglichen Bewertung die Kalkulation des erwarteten Nutzens durchgeführt wurde, muss eventuell sichergestellt werden, dass tatsächlich die optimale Strategie verwirklicht wird. Ein Beispiel hierzu findet sich bereits in der Odyssee: Odysseus ließ sich an den Mast ketten, um dem Gesang der Sirenen zu trotzen[49].

Das gerade geschilderte Prinzip, anfänglich eine Absicht zu fassen und diese trotz widriger Umstände umzusetzen, ist in der Literatur als „resolute choice" [153] bekannt. Ein weiteres Standardbeispiel stellt das von Kavka [122] erfundene „toxin puzzle" dar: Es wird eine hohe Summe Geld bezahlt, wenn man bis Mitternacht die feste Überzeugung hat, ein gewisses Toxin zu trinken, welches kurzzeitig ein sehr miserables Gefühl vermittelt, aber ansonsten keine ernsthaften Nebenwirkungen hat. Hier wäre, auch wenn es einem widerwärtig erscheint, die optimale Handlung die Absicht, die Chemikalie zu trinken, zu formen, da man dann ohne echte Leiden das Geld kassieren kann[50].

An dieser Stelle wollen wir noch etwas genauer auf den Wandel des epistemischen Zustands eingehen. Wäre es im Beispiel der Dinnerparty nicht möglich, auf die folgende Art zu räsonieren: „Mein Bauchgefühl sagt mir zwar, dass man trotz Alkoholgenuss sehr sicher Auto fahren kann, aber ich habe nicht vergessen, dass man in

[47] Zur Vereinfachung wollen wir annehmen, dass die Nutzensfunktion unverändert bleibt.

[48] Es sei angenommen, dass der Entscheider im nüchternen Zustand den Preis für das Taxi im Vergleich zu den Risiken und der Rückholung als völlig angemessen einstuft.

[49] Zu diesem Thema: [233].

[50] Man muss bemerken, dass das Beispiel sehr konstruiert ist, da man sich fragen muss, wie man feststellen kann, dass jemand die feste Absicht dazu haben kann, wenn er weiß, dass er es sowieso nicht trinken muss.

einer Situation wie der, in welcher ich mich gerade befinde, dazu neigt, seine eigenen Fähigkeiten ungerechtfertigt zu überschätzen."? In diesem konkreten Fall mag es noch möglich sein, den veränderten Zustand für entscheidungstheoretische Zwecke aufzuheben, aber von dieser Möglichkeit kann man nicht allgemein ausgehen, denn die Veränderung des epistemischen Zustandes kann deutlich tiefgreifender sein. Man betrachte etwa Alkoholabusus zusammen mit dem Vergessen bestimmter Erinnerungen.

Bis jetzt wurde nur der Fall erfasst, dass der epistemische Zustand, in welchem sich der Entscheider anfänglich befindet, allen weiteren Verfassungen „überlegen" ist. Die Verwendung der Bezeichnung „überlegen" scheint zu implizieren, dass es eine Hierarchie auf epistemischen Zuständen gibt. Spohn postuliert eine solche[51] und fordert als Kern seiner Theorie der strategischen Rationalität [218] die Evaluation der konkreten Entscheidungssituation immer aus dem relevanten überlegenen Zustand[52] zu tätigen. Hier taucht das parameteroffene Wort „relevant" auf; was ist damit gemeint? Man fragt sich, welche negativen Veränderungen der Wechsel in eine neue Situation mit sich bringt, und versucht dann diese zu vermeiden sowie alle Möglichkeiten zur Verbesserung zu nutzen. Das ist dann vornehmlich ein kontrafaktischer Zustand, in dem man sich zu der Zeit der Entscheidung gar nicht befindet[53]. Es ist intuitiv klar, was mit der Vermeidung von negativen Veränderungen gemeint ist; wie ist es aber zu verstehen und einzubeziehen, dass man im Verlauf der Entscheidungskette in eine überlegene Situation geraten kann (wenn man aus einer normalen Verfassung startet)? In eine typische überlegene Situation gerät man durch Informationszuwachs, welcher zum Beispiel in der Erfassung eines bestimmten Umweltzustandes besteht. Nun müsste man ja theoretisch die Situation aus dem Positive Counterpart beurteilen, welcher aber voraussetzt, dass man die Beobachtung schon gemacht hat. Deshalb kommt man nicht umhin, die Beobachtung probabilistisch zu gewichten. Dies ist aber mit der Theorie von Spohn insofern konform, als dass sich dort die relevante überlegene Situation probabilistisch gewichtet zusammensetzen darf[54]. Mittels dem Centering, welches in Kapitel 4 Unterabschnitt 1.6 angesprochen wurde, kann man sich allein durch Selbstreflektion in den Positive Counterpart befördern, wenn man eine wahrscheinlichkeitstheoretische Gewichtung der zukünftigen Evaluationen vornimmt. Damit besteht der Nutzen dieser Forderung darin, einen formalen Trick zu konstituieren, um Unwissenheit als Evaluation aus einer überlegenen Situation bezeichnen zu können.
Wenn man sich anfänglich in einem normalen epistemischen Zustand befindet und weiterhin nur mit negativen Veränderungen[55] konfrontiert wird, so reduziert sich die Theorie der strategischen Rationalität auf die Resolute Choice beziehungsweise

[51] Für ihn liegt eine Halbordnung vor, also eine irreflexive und transitive Relation.

[52] Dieser wird dann als „positive counterpart" bezeichnet.

[53] Wie etwa auf der Dinnerparty, wo man kurz vor der Heimfahrt gerade nicht nüchtern ist.

[54] Dadurch wird auch die Eindeutigkeit des Positive Counterparts sichergestellt, weshalb man von *dem* relevanten überlegenen Zustand sprechen kann.

[55] Zu diesen zählen neben Alkoholabusus und Vergessen unter anderem noch Drogeneinfluss und Gehirnwäsche.

„sophisticated choice"[56], da es sich von selbst versteht, dass die initiale Bewertung bindend sein muss. Der Fall, dass der Entscheider stattdessen in einer unterlegenen Situation startet, ist weitaus schwieriger zu behandeln. Falls er sich diesem Umstand bewusst ist und eine absehbare positive Veränderung bevorsteht, hat er sich so zu verhalten, dass seine erste Aktion möglichst wenige Optionen verbaut. Dies geschieht aus der Überlegung heraus, dass er weiß, dass sich sehr bald seine Wahrscheinlichkeitszuweisungen und Nutzensbewertungen im positiven Sinne ändern werden, also viel vertrauenswürdiger werden.

Ergänzend zu der vorgestellten Theorie seien die folgenden zwei Punkte bemerkt.

Erstens, die Definition des Positive Parts koppelt die überlegenen Wahrscheinlichkeitszuweisungen und Nutzensbewertungen aufgrund einer Rückführung auf einen einheitlichen epistemischen Zustand sehr stark. Es bietet sich vielmehr an, sie wegen ihrer Verschiedenheiten unterschiedlich zu behandeln und zusammenzufügen. Bezüglich der Wahrscheinlichkeiten haben wir eine gute Vorstellung davon, wie diese Überlegenheit begründet wird: nach stärkerer Orientierung an der Realität im Geiste des ultimativen epistemischen Rahmens. Ein solcher Maßstab existiert aber nicht für die Nutzensfunktion. Bei ihr ist stärker auf die Bedürfnisse des Entscheiders zu achten, womit die Nutzensfunktion, welche man nach Abschluss der Handlungskette hat, zu bevorzugen ist. Insbesondere bedeutet dies, dass bei einer bevorstehenden permanenten Änderung der Nutzensfunktion[57] alles an ihr auszurichten ist[58].

Zweitens, wenn man die Beziehung zwischen der Maximierung des erwarteten Nutzens und den epistemischen Zuständen des Entscheiders ernst nimmt, kann man sich überlegen, dass man nicht nur für vorgegebene Verfassungen eine vernünftige Kalkulation ausführen soll, sondern dass eine geeignete Manipulation der eigenen Zustände eine ausgereiftere Methodik zur Erfüllung der Maximierungsforderung darstellt.

Dies gilt zuerst für die Wahrscheinlichkeiten. Damit ist jetzt nicht gemeint, dass man willkürlich die Glaubensgrade festsetzt, um einen höheren erwarteten Nutzen zu erhalten. Vielmehr geht es um die Manipulation des eigenen Beitrages zu Weltzuständen. Hierunter zählt etwa Alkoholgenuss zur Herabsetzung der Hemmschwelle. Solche Veränderungen können im Sinne des Toxin Puzzles begründet nur von kurzer Dauer sein.

Weiterhin hilft auch eine Manipulierung der Nutzenswerte bei der Maximierungsforderung. Das typische Beispiel, welches bei dem Fall der Dinnerparty schon implizit erwähnt wurde, besteht im Konsum von Alkoholika, um seine Erlebnisse zu intensivieren. Bei der Anpassung der Nutzenswerte gibt es jedoch eine Subtilität

[56] Hierbei handelt es sich um eine etwas schwächere Form der Resolute Choice: Es wird allein aus der Anfangsperspektive geurteilt, ohne weitere Einflüsse auf die sich dann abspielenden Mechanismen zu nehmen. Bei der rationalen Lösung der Dinnerparty ist das auch gar nicht mehr notwendig, da man dann nur im Taxi heimkehren kann.

[57] Damit sind Veränderungen gemeint, die sich natürlich vollziehen und denen man sich nicht entgegensetzen kann. Zu solchen zählen etwa Geschmacksänderungen; eine Auseinandersetzung mit diesem Phänomen findet in [251] statt.

[58] Dies steht nicht im Widerspruch zu kurzzeitigen Veränderungen der Nutzensfunktion durch periodische Bedürfnisse wie Hunger und Schlaf, welche zu anderen Zeitpunkten einfach nicht verspürt werden, da man langfristig von deren Erfüllung profitiert.

zu beachten: Vielleicht muss man nach einer solchen Neujustierung seiner Bewertungen feststellen, dass Entscheidungen, die sich in der Vergangenheit abgespielt haben, suboptimal waren. Insofern ist damit auf eine Verträglichkeit mit bereits getroffenen Entscheidungen zu achten, da man diese als Teil eines übergeordneten Entscheidungsproblems (profan ausgedrückt: den erwarteten Nutzen seines Lebens zu maximieren) auffassen kann. Das heißt, dass einem die Bewertungen auch in der Rückschau größtenteils angemessen vorkommen müssen.
Zwischen den separaten Manipulationen von Wahrscheinlichkeiten und Nutzenswerten muss nicht immer eine Konkordanz bestehen, denn sie können auch widerläufig im Sinne eines Trade-Offs sein. Ein Beispiel besteht darin, dass man sich so sehr für etwas anstrengt, dass man es nicht mehr genießen kann. Dann muss natürlich sorgfältig im Sinne des erwarteten Nutzens abgewogen werden, welche Veränderungen empfehlenswert sind.
Natürlich kann eine solche Selbstmanipulation nur in einem gewissen Maße stattfinden. Gerade permanente Änderungen der Nutzensbewertung sind nur bedingt planbar und vollziehen sich oft sehr langsam, da die eigenen Ansichten einen Gleichgewichtszustand darstellen; die Fälle, in denen es sich anders abspielt, sind eher Ausnahmen als die Regel. Aber wenn man so etwas erahnen kann, dann ist es auch denkbar, dies zum Gegenstand strategischer Überlegungen zu machen.

Wenn man nun den Umstand beachtet, dass sich der Entscheider zu verschiedenen Zeitpunkten in unterschiedlichen epistemischen Verfassungen befinden kann, so sieht man ein, dass es tatsächlich eine Notwendigkeit für Wahrscheinlichkeiten eigener Handlungen gibt und sie nicht nur willkürlich als theoretische Möglichkeit stipuliert werden. Am deutlichsten wird das am Beispiel des Odysseus: Sie sind wichtig, um eventuell bestimmte Gegenmaßnahmen ergreifen zu können. Und dabei sind dann Wahrscheinlichkeiten höherer Ordnung, also Glaubensgrade bezüglich zukünftiger Glaubensgrade, unumgänglich, damit man seine zukünftigen Ansichten beurteilen kann, die zu dieser Handlung führen. Gleiches gilt natürlich auch bezüglich Wahrscheinlichkeiten für die Nutzensfunktion, jedoch war diese nicht mit dem Verdacht belastet, dass eine probabilistische Erfassung derselben unnütz oder gar widersprüchlich sei.

5.4 Das Verhältnis von Entscheidungs- und Spieltheorie

Bis jetzt schilderten wir die Bayesianische Entscheidungstheorie, deren Anfänge bereits im Jahr 1662 bei Arnauld [5] deutlich wurden. Ungefähr seit der Mitte des letzten Jahrhunderts existiert die Spieltheorie, welche durch VonNeumann und Morgenstern [242] begründet wurde. Wie gestaltet sich ihr Verhältnis zueinander[59]? Einerseits müsste die Spieltheorie ein Spezialfall der Entscheidungstheorie sein, da man ja hier auch Entscheidungen treffen muss, wohingegen man andererseits der umgekehrten Auffassung sein kann, weil man jegliche Entscheidungen als Teil eines entsprechenden Spiels deuten kann[60]. Die einzig konsistente Verbindung dieser beiden Ansichten bestünde darin, festzustellen, dass beide Theorien identisch sind; doch dies trifft nicht zu. Wie ist diesem Konflikt beizukommen? Bevor wir diese Frage diskutieren, rekapitulieren wir kurz die wesentlichen Annahmen und den formalen Rahmen der Spieltheorie von Morgenstern und VonNeumann.

Grundlegend ist, dass den Spielern rationales Verhalten unterstellt wird: sie wählen jeweils die Option, welche die „beste" Konsequenz für sie hat. Nun wird ein Spielverlauf dadurch beschrieben, dass die Spieler an gewissen Stellen unter Kenntnis der ihnen zugänglichen Informationen[61] Entscheidungen treffen müssen, welche in einen bestimmten Spielausgang münden. Wenn jeder Spieler bereits vorher weiß, in welche Situationen er potentiell geraten kann, so lässt sich der Spielverlauf konzentriert ausdrücken, indem man das Spiel auf seine „Normalform" reduziert, welche nun dargestellt wird. Da unter dieser Annahme jedem Spieler seine etwaigen Entscheidungsfragen bereits vorher bekannt sind, kann er sich vor Beginn des Spieles eine Abfolge von Handlungen, also eine Strategie, ausdenken, die alle Eventualitäten abdeckt. Dann ist, um an einem Spiel teilzunehmen, nur noch eine einzige Entscheidung zu treffen: die Wahl einer Strategie; das passiert in absoluter Unkenntnis der Wahlen der Gegenspieler. In der Normalform werden die Strategien aller Spieler auf einen Spielausgang abgebildet, der pro Spieler durch Abgabe beziehungsweise Erhalt einer bestimmten Anzahl von Nutzenseinheiten charakterisiert ist[62]. Es wird angenommen, dass jeder Spieler Kenntnis des Spiels in Normalform hat, also insbe-

[59]Spohn wirft diese Frage in [217] auf.

[60]Selbst wenn keine anderen Menschen involviert sind, besteht ein Einpersonenspiel gegen die Natur.

[61]Im Sprachgebrauch der Originalabhandlung bezeichnet man diese als „Informationsschemata" der Spieler. Diese sind von dem vollständigen Informationsschema des Schiedsrichters, welcher die Einhaltung der Regeln sicherstellt, zu unterscheiden.

[62]Die wesentlichen Ausführungen zum Konzept des Nutzens finden bei VonNeumann und Morgenstern in sehr konzentrierter Form statt, wobei es ihnen ausreicht, dass es eine für alle Spieler verbindliche Nutzensfunktion in die reellen Zahlen gibt, die bis auf lineare Transformationen eindeutig ist. Insofern werden hier keine großartigen Überlegungen angestellt, ob das Gut, das es zu gewinnen gibt, von den Spielern unterschiedlich beurteilt werden könnte; es wird als selbstverständlich betrachtet, dass es sich hier wohl um Auszahlungen in Form von Geldgewinnen handelt, die von den beteiligten Parteien als gleich nützlich angesehen werden. Das „Nullsummenspiel" wird darüber definiert, dass die Summe dieser Auszahlungen (über alle Spieler) für jedes gewählte Tupel von Strategien null ergibt.

sondere auch weiß, mit welchen Wahlmöglichkeiten und zugehörigen Konsequenzen die Mitspieler konfrontiert werden.
Durch diese Reduktion lässt sich eine formale Analogie zur Bayesianischen Entscheidungstheorie erblicken. Nehmen wir dazu wieder an, dass es bei einem Entscheidungsproblem für jede Aktion gleich viele Begleiterscheinungen gebe, die jeweils von einem übergeordneten Weltzustand stammen. Dann können die Konsequenzen in Nutzenseinheiten als Einträge einer zweidimensionalen Matrix beschrieben werden, wobei die Zeile durch die Aktion des Entscheiders und die Spalte durch die Begleiterscheinung gewählt wird. Bei der Normalform eines Spieles kann man ebenfalls die Gesamtheit der Ausgänge mittels einer Standardmatrix darstellen, wobei die Zeilen für die Strategien des Spielers stehen und die Spalten unterschiedlichen Strategien der Mitspieler entsprechen.
Wenn in dem Spiel die Folgen für die einzelnen Spieler deterministisch festgelegt sind, ist unmittelbar klar, wie sich die Ausgänge ergeben. Nun beinhalten aber viele bekannte und oft praktizierte Spiele Zufallsmechanismen; wie sind diese in die Ausgänge einzuberechnen? Für VonNeumann und Morgenstern besteht die Antwort in der Bildung des Erwartungswertes[63]. Darauf gehen sie in ihrem Buch nur ganz kurz ein und bemerken, dass weitere Ausführungen aufgrund der hervorragend ausgearbeiteten Theorie überflüssig seien. Insofern ist festzustellen, dass sich ein wesentliches Element der Bayesianischen Entscheidungstheorie hier wiederfindet, allerdings lehnen die Autoren die subjektivistische Deutung ab. Dies ist aber nur eine Frage der Interpretation, die Formeln sind identisch.
Naiv mag man denken, dass die Spieltheorie als Lösung immer eine bestimmte Strategie empfiehlt. Doch dies trifft nur auf spezielle Spiele zu. Allgemein handelt es sich bei den Lösungen um sogenannte „gemischte" Strategien. Gewöhnliche Strategien werden dann zur Abgrenzung als „reine" Strategien bezeichnet. Diese ergeben sich, wenn man reine Strategien im Sinne einer Konvexkombination[64] probabilistisch gewichtet. Wie ist das genau zu verstehen? Die Handlungen sind modulo der Relativierungen, die wir bereits diskutiert haben, unter der Kontrolle des Spielers, wodurch es nicht offensichtlich ist, welchen Zweck die Gewichtung erfüllen soll. Man könnte vermuten, dass die Gewichtungen allein angeben sollen, in welchem Verhältnis man bestimmte Strategien bei einer mehrfachen Wiederholung anwenden soll, allerdings widerspricht dies dem Anliegen der Autoren, eine „statische" Theorie zu entwerfen, also eine solche, die primär auf einer einzigen Durchführung gründet. Dass sich die Notwendigkeit gemischter Strategien trotzdem ergibt, zeigen Morgenstern und VonNeumann mittels eines indirekten Beweises[65]. Man nehme an, einem Spieler werde immer nur eine reine Strategie empfohlen. Da die Spieltheorie potentiell öffentlich ist, kann ein Gegenspieler bei bestimmten Spielen eine entsprechende Gegenstrate-

[63]Dass dies nicht die einzige rationale Herangehensweise ist, stellten wir schon in Unterabschnitt 1.4 dieses Kapitels über die nichtprobabilistischen Entscheidungsregeln dar.
[64]Konvexität und Linearität sind wesentliche mathematische Hilfsmittel zur Etablierung der Spieltheorie.
[65]Sie erachten diese Methode als zulässig, weil es eine fundamentale Vorgehensweise in den Wissenschaften zur Theoriebildung sei.

gie wählen, welche die anfängliche Empfehlung suboptimal macht; in diesem Sinne kann es nicht mehr die rationale Lösung für den erstgenannten Spieler sein. Am besten wird dies durch das Spiel Papier-Schere-Stein veranschaulicht: Würde dem Spieler genau eine der Optionen nahegelegt, so könnte der Gegenspieler die passend stärkere Option wählen. Dementsprechend wird klar, dass nicht immer eine reine Strategie ausgezeichnet werden kann[66]. Dieser Sachverhalt beschreibt genau das, was VonNeumann und Morgenstern meinen, wenn sie sagen, dass man verhindern muss, vom Gegner durchschaut zu werden; damit geht es in erster Linie darum, für den Gegner nicht berechenbar zu sein. Wenn man sich dies verdeutlicht hat, ist die probabilistische Gewichtung folgendermaßen aufzufassen: Im Einzelfall geht es vornehmlich darum, eine nicht vorhersehbare Handlung aus einer Menge von „günstigen" Optionen zu vollführen. Damit handelt es sich streng genommen nicht um Wahrscheinlichkeiten, wie wir sie verstehen.
Auch wenn es nicht das Originalanliegen war[67], so ergeben die Gewichtungen bei Wiederholungen als Maßgabe für relative Häufigkeiten einen Sinn, da sie dem Gegner keine statistisch ausbeutbare Abfolge liefern[68]. Im Wiederholungsfall orientieren sich die Gewichtungen damit stärker am frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff, wobei diese aber nicht im Sinne einer Voraussage zu verstehen sind, sondern als Handlungsaufforderung.

Doch wie ist es nun um den „Status" der beiden Theorien bestellt? Zunächst ist zu bemerken, dass die etablierten Bezeichnungen „Entscheidungstheorie" und „Spieltheorie" prima facie die Verschiedenheit des Untersuchungsgegenstandes suggerieren könnten. Wie aber bereits angesprochen wurde, verschwindet dieser Unterschied bei einer etwas genaueren Analyse: Einerseits muss man bei jedem Spiel Entscheidungen treffen und andererseits kann man jeden Vorgang, der Entscheidungen beinhaltet, als ein geeignetes Spiel interpretieren, da die getroffenen Wahlen an ein bestimmtes Ziel annähern oder entfernen. Insofern ist wohl keine substantielle Kritik daran zu formulieren, dass die Bayesianische Entscheidungstheorie und die Spieltheorie im Geiste von Morgenstern und VonNeumann letztendlich versuchen das gleiche Problem zu lösen, nämlich das Finden von Handlungen, welche die Folgen für einen Entscheidungsträger optimieren.
Wenn man sich nun klar gemacht hat, dass im Endeffekt beide Theorien die gleiche Fragestellung behandeln, ist es natürlich durchaus denkbar, dass eine der beiden einen Spezialfall darstellt. Doch das trifft nicht zu. Zuallererst könnte man die Unterschiedlichkeit der Wahrscheinlichkeitsinterpretationen, frequentistisch in der Spieltheorie beziehungsweise subjektivistisch in der Entscheidungstheorie, anführen,

[66] Dies ist nur möglich, wenn es einen „Gleichgewichtspunkt" in reinen Strategien gibt: selbst wenn der Gegner die Strategie eines Spielers kennen sollte, stellt dies keinen Grund dar, davon abzuweichen.

[67] Wiederholungen stehen aber immer im Hintergrund, da VonNeumann und Morgenstern die subjektivistische Anschauung ablehnen und sich für eine frequentistische Deutung aussprechen.

[68] Dies kann man sich wiederum mit dem Spiel Papier-Schere-Stein klarmachen, wo die Gewichtungen alle 1/3 sind: Würde ein Spieler sehr häufig den Stein wählen, so könnte sein Gegenspieler das ausnutzen, indem er verstärkt das Papier aussucht.

welche schon eine Subsumierung durch die Spieltheorie ausschließt. Wir wollen aber annehmen, dass die Spieltheorie auch mit einer bayesianischen Deutung versehen sei[69]. Um in unserem Verständnis eine Theorie sinnvoll als Spezialfall einer anderen klassifizieren zu können, müssen sämtliche Annahmen übernommen werden sowie die relevanten Gedanken und Leitideen schon in der übergeordneten Theorie formuliert sein.

Demnach ist die Entscheidungstheorie sicherlich kein Spezialfall der Spieltheorie, weil man nicht immer von der Rationalität der an der Entscheidung beteiligten Menschen ausgeht. Die Entscheidungstheorie ist in diesem Aspekt viel flexibler, da auch „irrationales Verhalten" anderer Menschen bei der Zuweisung der Wahrscheinlichkeiten berücksichtigt werden kann.
In diesem Sinne könnte man nun vermuten, dass die Spieltheorie ein Spezialfall der Entscheidungstheorie sei, da hierbei eigentlich keine einschränkenden Annahmen gemacht werden, welche in der Spieltheorie nicht zuträfen. Allerdings ergeben sich die gesamten theoretischen Resultate der Spieltheorie nicht in kanonischer Weise. Man könnte dagegenhalten, dass sich diese aus zusätzlichen Annahmen ergeben und alles weitere damit Spezialisierungen der sehr freizügig interpretierbaren Bayesianischen Entscheidungstheorie seien, doch greift dies zu kurz, wie die folgende Überlegung zeigt.
Man stelle sich eine Theorie A vor, welche je nachdem, ob die Probleme, für die sie einen Erklärungsanspruch hat, einfach oder schwer[70] zu lösen sind, in zwei Bereiche unterschieden wird: In der Kategorie der einfachen Probleme werden alle Antworten vorbildlich gegeben, was aber offensichtlich keine besondere Leistung war, da es ja nicht „schwierig" war; in der Kategorie der schweren Probleme werden keinerlei Lösungsideen gegeben beziehungsweise Annahmen gemacht. Sollte nun irgendjemand mit Hilfe einer neuen ingeniös ausgefeilten Theorie B eines der sehr schwierigen Probleme lösen, würden Anhänger der Theorie A darauf nur gelangweilt erwidern, dass dies lediglich einen Spezialfall ihrer Theorie darstelle, da alle ihre Annahmen und Ideen auch in Theorie B vertreten sind. Es ist evident, dass dies nicht sinnvoll sein kann.
Dies gilt insbesondere für die Entscheidungstheorie, denn sonst könnte man erfolgreich argumentieren, dass eigentliche jede beliebige Theorie ein Spezialfall der Bayesianischen Entscheidungstheorie sein müsste. Für eine gegebene Theorie ist sicherlich ein Entscheidungsproblem denkbar, bei dem genau diese Theorie bei Erwägungen relevant wird. Beispielsweise könnte man in die Situation geraten, dass man eine komplizierte Maschine reparieren muss, wobei dann zweifelsohne gewisse technische Kenntnisse hilfreich sind, welche man sich von physikalischen Gesetzmäßigkeiten abgeleitet vorstellen kann. Da nun genau diese in die Entscheidungsfindung eingehen,

[69] Demnach wären beide Theorien in dem Fall, dass kein weiteres intelligentes Individuum beteiligt ist, identisch. In der Terminologie der Spieltheorie heißt dies „Robinson-Crusoe-Ökonomie".

[70] Natürlich müsste man an dieser Stelle detailliert erläutern, was man generell unter einem einfachen beziehungsweise schweren Problem versteht. Für das Argument reicht es aber, wenn man eine intuitive Vorstellung davon hat, weshalb wir es damit belassen wollen.

wäre etwa die klassische Mechanik ein Spezialfall der Entscheidungstheorie. Offensichtlich ist ein derartiger Spezialfallbegriff nicht vernünftig. Die Bezeichnung des Spezialfalles impliziert vielmehr, dass in der übergeordneten Theorie die wichtigsten Ideen zur Problemlösung bereits angesprochen wurden. Das ist hier nicht der Fall, da die Entscheidungstheorie lediglich Aussagen darüber macht, wie sich Wahrscheinlichkeiten und Nutzenswerte in der Entscheidungsfindung niederschlagen sollen und ob evidentielle oder kausale Aspekte Eingang finden; welche physikalischen Erhaltungsgrößen existieren, wird dagegen nicht angegeben.
Konkret auf unseren Fall bezogen kann man etwa anführen, dass sich für Zwei-Personen-Spiele die Idee des sogenannten Majoranten- und Minorantenspiels, welche nun skizziert werden soll, nicht in kanonischer Weise aus der Entscheidungstheorie ergibt. Wenn man von dem oben eingeführten formalen Rahmen der Spieltheorie ausgeht, wählen ja beide Spieler ihre Strategie in Unkenntnis der Strategie des anderen. Das Majoranten- beziehungsweise Minorantenspiel stellt ein fiktives Spiel dar, das zum besten beziehungsweise schlechtesten Spielausgang führt. Beim Majorantenspiel muss der Gegner zuerst seine Strategie wählen und diese mitteilen; erst daraufhin wählt der Spieler eine seiner Strategien. Beim Minorantenspiel ist es umgekehrt, womit diese Extremfälle eine obere und eine untere Schranke für den tatsächlichen Ausgang ergeben. Falls diese identisch sind, so ist das Spiel „eindeutig bestimmt", also es existiert eine eindeutige rationale Handlungsempfehlung. Wie man sich denken mag, trifft das nicht auf alle Spiele zu. Ein wesentlicher Grund, der zur Einführung der gemischten Strategien beitrug, war der Umstand, dass unter ihrer Berücksichtigung etwa alle Zwei-Personen-Nullsummen-Spiele gewissermaßen eindeutig bestimmt sind[71].
An dieser Stelle mag man vielleicht meinen, dass man doch einfach hätte sagen können, die Spieltheorie sei kein Spezialfall der Entscheidungstheorie, weil sie im Gegensatz zu Letzterer gemischte Strategien liefert. Wie wir aber bereits sahen, sind gemischte Strategien aus dem Blickwinkel zu deuten, dass sie verschiedene Optionen gleichzeitig zur Auswahl bieten, da man nicht jede reale Handlung in Bruchteilen vollführen kann. Die Entscheidungstheorie kann jedoch unter der Forderung der Maximierung des erwarteten Nutzens sehr wohl mehr als eine Handlung empfehlen; dies ist der Fall, wenn das Maximum nicht eindeutig ist.
Typische Spezialfälle von Theorien ergeben sich zum Beispiel, wenn ein in der übergeordneten Theorie frei wählbarer Parameter festgesetzt wird. Dies ist dadurch begründet, dass viele Theorien expliziten Gebrauch von mathematischen Formalismen machen. Etwa ist die euklidische Geometrie der Ebene sicherlich ein Spezialfall der euklidischen Geometrie für endlichdimensionale Räume. Oder um bei der Spieltheorie zu bleiben: Es wäre absurd zu behaupten, dass die Theorie der Vier-Personen-Spiele kein Spezialfall der Spieltheorie von Morgenstern und VonNeumann wäre. In der Bayesianischen Entscheidungstheorie ergeben sich nicht einfach durch Festsetzung eines Parameters einige der Theoreme der Spieltheorie. Die Überlegungen der Spieltheorie und ihre Methoden werden durch die Bayesianische Entscheidungstheo-

[71] Dies zeigt man mathematisch mit Hilfe von Konvexkombinationen und linearer Algebra.

rie keinesfalls vorweggenommen.

Entscheidungs- und Spieltheorie verwenden deutlich unterschiedliche Ansätze zur Lösung des gleichen Problems: Die Spieltheorie betont die Rationalität der Spieler, wohingegen die Bayesianische Entscheidungstheorie Menschen wie „Automaten" behandelt[72]. Die basale Erkenntnis, die zur Etablierung der Spieltheorie führte, bestand darin, dass es Teile der Umwelt gibt, die sich wesentlich komplexer verhalten als andere. Vor diesem Hintergrund genießen zweifellos andere Menschen besondere Aufmerksamkeit, da diese die gleichen Überlegungen wie man selbst anstellen können; die Spieltheorie gesteht ihnen ebenfalls Rationalität und intellektuelle Fähigkeiten zu. Bei der Bayesianischen Entscheidungstheorie wird zwar anerkannt, dass Personen komplexe Teile der Umwelt ausmachen, jedoch spricht dies bei ihr nicht dagegen, die Handlungen anderer Menschen im Sinne einer „kleinen Welt" zu deuten[73]: Es ist lediglich die Zuweisung von subjektiven Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Aktionen des Gegenspielers zu leisten. Das wird dadurch motiviert, dass Menschen in vielen alltäglichen Situationen gerechtfertigt nicht anders als Automaten behandelt werden, von deren Verhalten man ziemlich genaue Vorstellungen hat. Nach diesen Überlegungen wäre es korrekter und angemessener, wenn man sich darauf einigte, das gesamte Problemfeld als Spiel- und Entscheidungstheorie zu bezeichnen, und dann noch nach der Behandlung anderer, beim Ausgang des Vorgangs involvierter Personen, unterscheidet.
Zuletzt ist noch zu erwähnen, dass Spohn in [217] die Bayesianische Entscheidungstheorie um spieltheoretische Ideen erweitert, indem er für Zwei-Personen-Spiele das Konzept des „wechselseitigen Wissens einer bestimmten Ordnung" bezüglich der Rationalität, der Nutzensfunktionen (welche nicht identisch sein müssen) und der Wahrscheinlichkeiten der Spieler einführt[74]. Abgesehen davon, dass diese Erweiterung auf „enttäuschend triviale Weise"[75] Teile der Spieltheorie adaptiert, wäre die Spieltheorie damit immer noch kein Spezialfall der Entscheidungstheorie, da es sich nur um vereinzelte Ideen für Zwei-Personen-Spiele handelt.

[72]Vgl. [217] für die orthodoxe Position der Bayesianer, die wir nun schildern.

[73]Diese Bezeichnung geht auf Savage zurück [190].

[74]Eine Person hat eine „Überzeugung erster Ordnung", dass p, wenn sie fest glaubt, dass p. Sie hat eine „Überzeugung der Ordnung $n+1$", dass p, wenn sie fest glaubt, dass die andere Person eine Überzeugung der Ordnung n hat, dass p. p ist genau dann „wechselseitiges Wissen der Ordnung n" zwischen den beiden Personen, wenn p wahr ist und beide Personen Überzeugungen der Ordnungen von eins bis n haben, dass p. Im Bezug auf Unterabschnitt 3.2 in Kapitel 4 ist zu bemerken, dass es sich hier um einen unausgereiften Wissensbegriff handelt, nicht zuletzt weil „fest glauben" im Sinne von Wahrscheinlichkeit eins zu deuten sei.

[75]Spohn äußert sich in [217] selbst so.

Kapitel 6

Induktion

6.1 Einbettung in das erkenntnistheoretische Problem der Induktion

6.1.1 Begriffsklärung und Verhältnis zu Wahrscheinlichkeiten

Nach unserer Auseinandersetzung mit dem Wahrscheinlichkeitsbegriff stellt sich in gewisser Weise die Frage, wie es um das Verhältnis von Induktion und Wahrscheinlichkeiten beschaffen ist. Das erkenntnistheoretische Problem der Induktion wurde erstmals von Hume in seinem „Treatise of Human Nature" [107] entsprechend seiner Bedeutung für die Epistemologie als solches gewürdigt. Er spricht dort nicht von Induktionen an sich, sondern ihm geht es vorwiegend um kausale Assoziationen: Wenn man oft das Phänomen zweier zeitlich direkt aufeinanderfolgender Geschehnisse beobachte, so komme man unweigerlich dazu, diese beiden Ereignisse aus Gewohnheit miteinander zu assoziieren; insbesondere prognostiziere man dann letzteres Ereignis bei einer erneuten Manifestation des zeitlich ersten Geschehnisses. Hierbei handelt es sich nicht um einen menschenspezifischen Prozess, da Tiere ebenso diese Art von Muster wahrnehmen und anwenden können. Allerdings spielt sich das Ganze bei Menschen auf einer etwas höheren Ebene ab, weshalb er zwischen „causal inference" bei Tieren und „causal belief" bei Menschen unterscheidet. Charakteristisch ist in jedem Fall der Versuch, von beobachteten Sachverhalte auf zukünftige zu schließen. Aufzuzeigen, dass sich dies nicht so unproblematisch darbietet, wie man vielleicht naiv denken mag, ist der große Verdienst von Hume.
Deduktive Schlussweisen decken immer nur Tautologien auf; sie reizen also mittels demonstrativen Schlüssen den Gehalt von bestehendem Wissen aus und sind in diesem Sinne „wahrheitskonservierend"[1]. Induktionen wollen dagegen auf Sachverhalte folgern, die nicht aus bestehendem Wissen auf dem eben erwähnten Weg herleitbar sind, weshalb man sie auch als „Erweiterungsschlüsse"[2] bezeichnet. Dass diese sowohl in theoretischer als auch praktischer Hinsicht notwendig und unumgänglich

[1]Diese Bezeichnung geht auf Stegmüller [222] zurück.
[2]Ebenfalls aus [222].

sind, leuchtet sofort ein: Nicht nur möchten Wissenschaftler mit Hilfe von Theorien Dinge wie etwa Anordnungen von Himmelskörpern[3] oder biologische Abläufe voraussagen, sondern auch alltäglich muss man Entscheidungen treffen, deren Folgen nicht garantiert werden können. Obwohl festzustellen ist, dass die persönliche Lebensführung einen ständig dazu nötigt, Induktionen vorzunehmen, wäre es ungerecht, wenn man die Meinung vertreten würde, dass Induktionen immer nur aus einer praktischen Notwendigkeit erwüchsen und damit als ein Teilgebiet der Pragmatik einzustufen wären. Tatsächlich kann man aber Induktionen aus einem rein theoretischen Ansinnen heraus anstellen, ohne dass dem Gedankengang konkrete Handlungen folgen müssen. In beiden Fällen versuchen Induktionen das zu leisten, was Deduktionen nicht vermögen.

Im Carnap'schen Sinne haben wir Induktion als das im Vergleich zur Deduktion komplementäre Vorgehen für die Erlangung von Wissen eingeführt, womit wir unter Induktion eine Vielzahl von Schlussweisen subsumieren können[4]; ursprünglich verstand man Induktionen nur in dem von Hume skizzierten Verständnis, welches zweifelsohne immer noch eine enorme Bedeutung innehat. Wir sprechen hier von Wissenserlangung in dem Sinne, dass aus bereits gemachten Beobachtungen oder allgemeiner Wissen weiteres potentielles Wissen durch Überlegung zu Tage gefördert werden soll, weshalb der Vorgang des Beobachtens an sich von uns nicht als Induktion eingestuft wird. Da aber jede Rechtfertigung einer wissensschaffenden Methodik entweder deduktiv oder induktiv sein muss und wir gerade beide als komplementär charakterisierten, bleibt wiederum nur eine induktive Begründung von Induktionen übrig, welche aber dann zu einer Zirkularität führt, die uns einsehen lässt, dass wir über die Aussagen von Induktionen niemals vollständige Gewissheit[5] wie im deduktiven Fall haben können[6].

Trotz einer nicht garantierbaren Sicherheit möchte man grundsätzlich bestehende Kenntnisinhalte auf Fragestellungen projizieren, deren Antwort sich dem eigenen Wissensstand entziehen. Vor diesem Hintergrund dient das „grue paradox" von Goodman [85], welches oft als das „new riddle of induction" bezeichnet wird, als Mahnung dazu, diese unter einer epistemologischen Sparsamkeit zu vollziehen. Das Paradox lässt sich folgendermaßen beschreiben. Bis zu einem gewissen Zeitpunkt t hatten alle beobachteten Smaragde die Farbe grün, was einen intuitiv zu der Schlussfolgerung kommen lassen kann, dass alle existierenden Smaragde grün seien. Wenn wir nun unter der Eigenschaft „grue" verstehen, dass vor t beobachtete Instanzen grün und nach t beobachtete Instanzen blau sind, so haben alle beobachteten Sma-

[3] Bekanntlich hatte ja schon Laplace Angst davor, dass die Sonne nicht erneut aufgeht.

[4] Oftmals wird auch noch der Begriff der „Abduktion" ins Spiel gebracht, welcher auf Peirce [168] zurückgeht. Er unterschied drei Stufen der Erkenntnislogik (Abduktion, Deduktion und Induktion), wobei die Abduktion ein Hypothesen generierendes Verfahren ist, welches sich typischerweise blitzartig vollzieht. Aus einer Hypothese werden deduktive Konsequenzen abgeleitet, welche dann mittels der Induktion auf weitere Sachverhalte projiziert werden. Dafür, die Abduktion als einen Spezialfall der Induktion zu verstehen, spricht, dass auch bayesianische Schlussweisen manchmal als abduktiv bezeichnet werden.

[5] Wenn wir also das, was uns Deduktionen bieten, als besonders zuverlässiges Wissen auszeichnen.

[6] Dieses Argument geht auf Hume zurück.

ragde auch die Eigenschaft grue. Mit einer erneuten simplen Verallgemeinerung kann man die Vermutung begründen, dass alle Smaragde die Eigenschaft grue haben. Das heißt jedoch, dass man auf komplementäre Folgerungen gelangt: dass alle Smaragde, die nach t beobachtet werden, grün beziehungsweise blau sind. Es ist richtig, dass hier das gleiche Inferenzschema ausgenutzt wurde und die Eigenschaften grün beziehungsweise grue auf alle wahrgenommenen Instanzen zutreffen, jedoch bedient sich die Eigenschaft grün einer epistemologischen Sparsamkeit. Man hat keinen vernünftigen Grund eine Eigenschaft wie „grue" zuzuschreiben, welche die Beobachtungen derart transzendiert, und insofern ist der Vorgang der Projektion von vorhandenem Wissen nicht auf willkürliche Weise zu vollziehen.

In der einfachsten Form möchte eine Induktion nur die mögliche Welt ermitteln, in die man vernünftigerweise das meiste Vertrauen setzen sollte. Auf diese Weise findet eine dichotome Bewertung aller möglichen Welten statt. Andererseits kann man alle möglichen Welten mit einer nichttrivialen Bewertung versehen. Damit erkennen wir, was Wahrscheinlichkeiten bezüglich den Resultaten einer Induktion leisten: ein verfeinertes Situationsverständnis. Der Einsatz von Wahrscheinlichkeiten muss sich aber nicht auf die abschließende Bewertung beschränken, sondern induktive Schlüsse können unter expliziter Verwendung von Wahrscheinlichkeiten in deren zugehöriger formaler Theorie vollzogen werden[7]. Diese Arten zu schließen werden unter dem Apparat der Statistik vereint. Es bleibt festzuhalten, dass Statistik nur eine Variante der Induktion darstellt und diese an sich viel allgemeinere Vorgehensweisen erlaubt.

6.1.2 Arten von Induktionen

In unserer obigen Darstellung der Bedeutung von Wiederholungen für Lebewesen ließ sich schon die naheliegendste und natürlichste Form eines induktiven Schlusses verdeutlichen: was in der Vergangenheit beobachtet wurde, soll so auch in der Zukunft gelten; beziehungsweise allgemeiner: was über einen Sachverhalt bekannt ist, soll auch für vergleichbare Sachverhalte gelten. Dieser Schluss setzt implizit eine Uniformität der Welt in einem Teilbereich voraus. Dass diese Art von Induktion sehr nützlich und für viele Zwecke geeignet ist, wissen wir aufgrund mannigfaltiger Beispiele aus unserer Erfahrung; die Relevanz und Bedeutung dieser Vorgehensweise kann nicht ernsthaft bestritten werden, da sie im Alltag und in den Wissenschaften nur zu oft erfolgreich eingesetzt wird. Dies liegt einfach daran, dass häufig eine Abwesenheit von verändernden Umständen nicht nur in unserem epistemischen Rahmen, sondern auch tatsächlich vorliegt.

Diese Art von Induktion[8] wird von Keynes in seinem „Treatise on Probability" [124]

[7] Insbesondere interessiert, wie sich Teilwahrscheinlichkeitsbewertungen zusammenfügen. Wahrscheinlichkeiten helfen besonders dabei, nichteinheitliche Informationen einem ordnenden Prinzip zu unterwerfen: Grundsätzlich beobachtet man irgendwelche Dinge, welche sich nicht vollständig einheitlich präsentieren, also auch Ausnahmen beinhalten; damit man diese mit Hilfe eines ordnenden Prinzips erklären kann, geht man davon aus, dass eigentlich auch immer das Gegenteil möglich ist, und wie sich genau deren Verhältnis gestaltet versucht man mit Wahrscheinlichkeiten zu erfassen.

[8] Aufgrund ihrer immensen Bedeutung wird unter einer Induktion oft nur genau diese Schlussweise verstanden.

beschrieben; es ist instruktiv, seine Ausführungen, bei denen er auch gleichzeitig die Rolle der Anzahl gemachter Beobachtungen genauer erläutert, zu rekapitulieren. Auch er erkennt an, dass es grundsätzlich darum geht, vorhandenes Wissen oder allgemeiner vorhandenen Glauben[9] aufgrund von Ähnlichkeiten auf andere Sachverhalte zu projizieren. Dazu gibt er ein konkretes Beispiel von Hume: Da wir schon sehr oft Eier gegessen haben, nehmen wir an, dass auch das nächste einen vergleichbaren Geschmack haben wird, was wir an gemeinsamen Eigenschaften wie etwa Form, Größe und Gewicht festmachen. Keynes nennt das „positive Analogie" (positive analogy). Allerdings bemerkt er, dass Hume einen wichtigen Punkt, nämlich die sogenannte „negative Analogie" (negative analogy), vergessen hat; im Bezug auf das Beispiel bedeutet das, dass man Eier an den verschiedensten Orten gegessen haben muss, um festzustellen, dass dieser Umstand keinen Einfluss auf den Geschmack hat[10]. Somit geht es um die Identifikation irrelevanter Faktoren für den Sachverhalt von Interesse. Es ist wichtig, zu erkennen, welches Wissen bei der Projektion zur Anwendung kommen beziehungsweise vernachlässigt werden muss, weshalb bei einer gewissenhaften Ausdeutung des Konzeptes der Analogie beide Aspekte, positive und negative Analogie, berücksichtigt werden müssen.

Der Einfluss der Anzahl gemachter Beobachtungen wird bei Keynes durch die Bezeichnung „reine Induktion" (pure induction) erfasst. Intuitiv mag es sofort einleuchten, dass man bei einer größeren Anzahl an wiederholten Beobachtungen größeres Vertrauen in eine bestimmte Vermutung haben kann, aber was steckt hier wirklich dahinter? Üblicherweise gibt es eine Vielzahl relevanter Einflussfaktoren, welche sich der eigenen Kenntnis entziehen. Entweder ist deren Gesamtheit nicht bekannt[11] oder man kennt deren Gesamtheit, jedoch nicht das Verhältnis, in welchem diese tatsächlich zur Erscheinung neigen[12]. Um beurteilen zu können, in welchem Verhältnis diese zur Manifestation eines bestimmtes Ereignisses beitragen, ist die reine Induktion notwendig. Keynes bemerkt hierzu, dass man, falls vollständige Kontrolle über alle relevanten Faktoren vorläge, eigentlich keine reine Induktion benötigte. Dazu ist aber zu ergänzen, dass diese Feststellung nur in einer deterministischen Welt gültig sein kann, denn andernfalls kann selbst bei vollständiger Übereinstimmung der Anfangsbedingungen ein anderes Ergebnis resultieren. Damit sieht man ein, dass es grundsätzlich wünschenswert ist, schon mehrere Wiederholungen ähnlicher Situationen zu kennen, um sich ein besseres Bild von der Situation machen zu können. Natürlich kann sich die Notwendigkeit ergeben, trotz mangelndem Situationsverständnis und geringer Anzahl an Erfahrungswerten zu urteilen, jedoch sollte man sich dabei immer der fehlenden epistemologischen Rechtfertigung bewusst sein.

[9]Bestenfalls handelt es sich dabei um Wissen.

[10]Natürlich ist es nicht auszuschließen, dass dieser Umstand tatsächlich eine Rolle spielt, doch wollen wir es zur Verdeutlichung des Gedankengangs nicht annehmen.

[11]Ein Beispiel hierzu wären die Auswirkungen bestimmter Nahrungsmittel auf die Gesundheit von Menschen, die aufgrund der Komplexität der erklärenden Theorie der Molekularbiologie nicht in all ihren Facetten erfasst werden können.

[12]Beispielsweise fällt ein geworfener Stein nur dann auf den Boden, falls niemand auf die Idee kommt, ihn vorher abzufangen.

Im Sinne der Projektion von bestehendem Wissen auf unbekannte Sachverhalte ist es aber auch absolut legitim, eine gegenteilige Art anzuwenden: nämlich in der Kenntnis der Vergangenheit auf einen vollständig anderen Ereignisverlauf zu schließen[13], womit eine „invertierte" Projektion angewendet wird[14]. Dies wird nahegelegt, wenn man von einem Bruch der Uniformität informiert ist. Zum Beispiel lässt eine weitere Verwendung eines stark abgenutzten Werkzeuges gerade darauf folgern, dass es „seinen Geist aufgibt", womit sich die fehlende Funktionstüchtigkeit gerade nicht in vergangene Beobachtungen einreihen lassen wird. Natürlich könnte man hierauf erwidern, dass dies wiederum einen Rückgriff auf Erfahrungswerte darstellt, da man schon mehrfach gesehen hat, was mit überstrapazierten Gegenständen passiert. Dennoch ist zu bemerken, dass es sich nicht immer auf diese Weise gestalten muss. Wenn einem gewisse Charakteristika nahelegen, ein bestimmtes zukünftiges Verhalten zu vermuten, ist es gerechtfertigt, bei komplementären Charakteristika auch entgegengesetzte Eigenschaften zu erwarten, obwohl solche speziellen Instanzen noch nicht beobachtet wurden[15]. Letztendlich vollzieht sich hier eine ausgereiftere Induktion: Basierend auf der grundlegenderen analogen Schlussweise werden weitere Modifikationen vorgenommen. Dies wird gemeinhin auch unter dem Begriff „higher order induction" zusammengefasst.

Statistik ist eine Art analog induktiv unter expliziter Verwendung von Wahrscheinlichkeiten zu schließen. Um einen besseren Überblick über die Arten von analogen Schlussweisen, zu denen Statistik fähig sein sollte, zu bekommen, empfiehlt es sich Carnaps Klassifikation [32] zu Gemüte zu führen. Zum besseren Verständnis wird hier vornehmlich von Populationen und Individuen gesprochen, obwohl die beteiligten Wahrscheinlichkeiten nicht immer zusätzlich als relative Häufigkeiten deutbar sein müssen. Zum Beispiel möchte man auch die zu erwartende Leistung eines Menschen modellieren, jedoch kann es hier keinen enthüllenden Blick wie bei einer Urne geben, da Menschen nicht mit dem Erwartungswert ihrer Leistungen „bedruckt" sind.
Carnaps Einteilung von induktiven Schlussweisen kennt fünf Klassen. Die Erste ist der „direkte Schluss": Von der Frequenz einer Eigenschaft in einer Population beziehungsweise Grundgesamtheit wird auf die Frequenz dieser Eigenschaft in einer Stichprobe, die aus der Population entnommen wurde, gefolgert. Dieser ist jedoch für die meisten praktischen Fragestellungen irrelevant, da sich die Erfassung einer vollständigen Population aufgrund von Kosten und Zeitaufwand unter Gesichtspunkten der Effizienz von selbst verbietet. Darauf folgt der „Voraussageschluss": Mit Hilfe einer Stichprobe möchte man Voraussagen über eine weitere Stichprobe machen, welche die Erste nicht überlappt. Ein prominenter Spezialfall ist der „singuläre Vor-

[13]Oder wieder allgemeiner: für einen ähnlichen Sachverhalt genau gegenteilige Eigenschaften vermuten.

[14]Natürlich muss nicht immer eine *reine* herkömmliche oder invertierte Projektion vollzogen werden, da auch allerlei Mischformen denkbar sind.

[15]Hiermit wird auch in gewisser Weise die Diskussion zwischen dem „Kübel-" und „Scheinwerfermodell" für eine gültige Theorie der Erkenntnis in [173] angesprochen.

aussageschluss", bei dem die zweite Stichprobe aus einem einzigen Objekt besteht. Das ist wohl die Art, die Humes ursprünglich beschriebenen Inferenzen am nächsten kommt. Laut Carnap ist der Voraussageschluss der wichtigste Induktionsschluss, da sich aus ihm die restlichen drei ableiten lassen. Nummer drei ist dann der „Analogieschluss": Der Schluss von einem Individuum auf ein anderes aufgrund von bekannten Ähnlichkeiten. Das Gegenteil der ersten Klasse ist der „inverse Schluss": Von der Frequenz einer Eigenschaft in einer Stichprobe wird auf die relative Häufigkeit derselben in der zugehörigen Grundgesamtheit geschlossen. Es ist unmittelbar klar, dass dieser von höherer praktischer Bedeutsamkeit ist, da man ja gerade mit begrenzten Ressourcen möglichst viele Erkenntnisse über eine Population einholen möchte. Konkrete Beispiel sind etwa Meinungsumfragen. Im besten Falle handelt es sich um eine „repräsentative" Stichprobe, was bedeutet, dass die Population maßstabsgetreu abgebildet wird. Wenn man von einem Zustand absoluter Unwissenheit ausgeht, ist natürlich klar, dass man durch eine Stichprobe geneigt ist, genau die angezeigten Eigenschaften für die größere Menge zu folgern; das Anliegen von Statistik besteht darin, zu quantifizieren, wie sehr man sich auf solch eine Verallgemeinerung verlassen kann. Die letzte Art ist dann noch der sogenannte „Allschluss": Man schließt mittels einer Stichprobe auf eine Hypothese, die den Charakter eines Allsatzes hat. Dieser hat besondere Relevanz im Bezug auf wissenschaftliche Theorien, welche allgemeine Gesetzmäßigkeiten postulieren.

Es ist offensichtlich, dass der Analogieschluss ein Spezialfall des singulären Voraussageschlusses ist. Jedoch ist es gewissermaßen rätselhaft, wie Carnap behaupten kann, dass der Voraussageschluss den inversen Schluss unter sich subsumiert, da es ja möglich ist, dass man mit der Ziehung aus einer Urne mit Zurücklegen konfrontiert ist, bei dem die Stichprobe wieder Teil der Grundgesamtheit wird. Der Voraussageschluss scheint nach Standardstatistikverfahren eher eine Kombination von Nummer vier und eins zu sein. In seiner einfachsten Anwendung wird eine beobachtete relative Häufigkeit aus der ersten Stichprobe einfach für die zweite postuliert. Wenn man dieses Vorgehen im Rahmen der Wahrscheinlichkeitsrechnung verstehen möchte, macht man bei genauerer Betrachtung zwei Schritte: Zunächst wird mittels der ersten Stichprobe auf eine Population gefolgert und dann mit Hilfe dieser Erkenntnis auf die weitere Stichprobe. Wenn man etwa unter der Annahme von Unabhängigkeit, also unter einer Bernoulliverteilung, arbeitet, ergibt der „MLE" (maximum likelihood estimator[16]) für die Erfolgswahrscheinlichkeit, also die in der Population gültige relative Häufigkeit der Eigenschaft, genau die Frequenz der beobachteten Stichprobe; weiterhin erhält man dann unmittelbar, dass die erwartete Frequenz der neuen Stichprobe derjenigen der alten entspricht. Die skizzierte Schlussweise verdeutlicht exemplarisch, weshalb gerade die Wahrscheinlichkeitstheorie als *die* Modellierung unserer Intuition gilt: Die „naive" Schlussweise, wie sie schon bei Hume anklang, kann ausgereifter erklärt und flexibler für umfassendere Voraussagen[17] angewendet werden.

[16] Der MLE bestimmt die Frequenz in der Population, nach der die beobachtete relative Häufigkeit die größte Wahrscheinlichkeit hat.

[17] Wenn man etwa wissen möchte, wie es um abweichende Frequenzen steht.

Besonders bekannte Varianten der Statistik stellen die Klassische und die Bayesianische Statistik dar, auf die wir im zweiten Abschnitt dieses Kapitels genauer eingehen werden[18]. Die Klassische Statistik gilt heutzutage als Standard unter Wissenschaftlern und konnte andere induktive Schlussweisen beinahe vollständig diskreditieren beziehungsweise verdrängen. So auch beim „Irrtum des Spielers" (gambler's fallacy), bei welchem eigentlich zwei Intuitionen miteinander kollidieren. Etwa wird beim Lotto beobachtet, dass in einem bestimmten Zeitraum von allen möglichen Zahlen einige unterdurchschnittlich häufig gezogen wurden. Einerseits möchte man nun eine erhöhte Wahrscheinlichkeit für deren zukünftige Ziehung vermuten, da sie ja noch nicht zur Geltung kamen; andererseits möchte man dieser Tatsache keinen Einfluss beimessen, da alles unabhängig vonstatten geht. Letztere Überzeugung schlägt sich darin nieder, dass dieses Problem zumeist mit der Bernoulliverteilung[19] modelliert und alles andere als „Irrtum" bezeichnet wird. Jedoch wollen wir nun fragen, ob dieser Fall wirklich so eindeutig ist, wie man immer vorgibt, und was der wahre Grund für die Bevorzugung der Bernoulliverteilung ist.

Unabhängigkeit wird vermutet, da das Gerät immer wieder aus dem gleichen Anfangszustand startet und man auch sonst Einflüsse vermeidet, die den Ausgang beeinflussen könnten; zusätzlich wird das dadurch motiviert, dass man die Lottomaschine ziemlich genau justieren und kontrollieren kann. Aber wenn die Maschine immer wieder aus dem gleichen Zustand startet, wieso unterscheiden sich dann die Resultate? Die Antwort ist offenbar, dass es Einflussfaktoren gibt, die sich den Kontrollstandards entziehen. Das heißt also, dass es gewisse nicht zu bändigende Einflüsse gibt, von denen man hofft, dass sie sich irgendwie ausmitteln und jede Kugel gleich behandeln werden. Wie kommt man aber auf die Idee, dass dies der Fall sei? Zuerst einmal kann man sich die größte Mühe bei der Fertigung des Apparates und der Kugeln geben. Das reicht aber nicht aus, denn man muss dann noch überprüfen, ob sich aufgrund dieser Maßnahmen das gewünschte Verhalten einstellt. Dies geschieht in geeigneter Weise, indem man den Vorgang hinreichend oft wiederholt und feststellt, dass die relativen Häufigkeiten für die verschiedenen Zahlen annähernd identisch sind und man demnach gerechtfertigt die Bernoulliverteilung zur Beschreibung anwenden darf. Wäre beispielsweise eine bestimmte Zahl bei einer größeren Anzahl von Wiederholungen gar nicht erschienen, so hätte man vermuten müssen, dass etwas mit der Maschine nicht stimmt. Man urteilt also aufgrund des beobachteten Verhaltens, dass die Maschine die Ziehungen vollkommen unabhängig erfolgen lässt, womit die Standardtheorie anwendbar ist.

Das gleiche beobachtete Verhalten, annähernd uniforme Verteilung, kann aber genauso für die zweite oben beschriebene Schlussfolgerung herangezogen werden. Was angesprochen werden soll, ist das Folgende: Ähnlich dem Goodman Paradox erklären

[18] Bayesianische Statistik wurde bereits in Kapitel 4 Abschnitt 2 angewendet, jedoch wollen wir sie noch systematischer darstellen.

[19] Wenn p die Wahrscheinlichkeit für die Ziehung bestimmter Zahlen beschreibt, legt die Bernoulliverteilung die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten wiederholten Ziehung mit n Erfolgen und k Misserfolgen als $p^n(1-p)^k$ fest. Die Produktstruktur kodiert die Unabhängigkeit.

beide abgeleiteten Eigenschaften die bis dahin bestehenden Beobachtungen ungefähr gleich gut, allerdings ist hier keinesfalls offensichtlich, weshalb sich eine der beiden Eigenschaften für eine Induktion verbieten sollte. Der Hauptgrund, warum man eine der beiden Induktionen als „naiv" abschreibt, scheint zu sein, dass sie in ein komplizierteres Modell mündet. Beim Standardansatz mit der Bernoulliverteilung bietet es sich so dar, dass zwar ein Versuchsresultat, bei dem eine Zahl unterdurchschnittlich oft gezogen wird, an sich etwas unwahrscheinlicher ist als ein Resultat, bei dem alle Zahlen ungefähr gleich vertreten sind [20], aber die Wahrscheinlichkeit für die nächste Ziehung hiervon nicht beeinflusst wird. Beim alternativen Ansatz ist es vielmehr so, dass man die Ziehungen nicht als unabhängig annimmt. So muss man sich vorstellen, dass abhängig von der bisherigen Ziehung die anderen Zahlen unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten erhalten, die das Gesamtresultat möglichst in die Gleichverteilung streben lassen. Insofern mag man hier bemerken, dass sich die „naive" Induktion auf ein weit komplexeres Modell zurückführen lässt.

6.1.3 Experiment und Beobachtung

Statistik wird besonders zur Auswertung von Experimenten herangezogen. Sie sind aber mit einer Problematik verknüpft, die wir nun etwas grundlegender erfassen möchten: Bezüglich empirischer Erkenntnisgewinnung wird oft der Unterschied zwischen Experiment und „reiner" Beobachtung stipuliert. Wir wollen nun untersuchen, inwiefern dabei wirklich Unterschiede bestehen, und überprüfen, ob Savage [190] tatsächlich Recht hat, wenn er behauptet, dass zwischen Experiment und Beobachtung keine so essentiellen Verschiedenheiten bestehen, wie man eigentlich annehmen möchte[21]. Im Endeffekt handelt es sich bei beiden Vorgehensweisen um Beobachtungen schlechthin, jedoch wird bei einer reinen Beobachtung etwas wahrgenommen, ohne dass man dies aktiv herbeiführen musste. Die Frage ist nun, wie essentiell dieser Unterschied in der Art der Beeinflussung ist. Ein solcher Zwang kann grundsätzlich einen Eingriff in ein System darstellen, der den Charakter der intendierten Beobachtung verfälscht. Das beste Beispiel hierfür ist der sogenannte „Hawthorne-Effekt", bei welchem Arbeiter, die wissen, dass die beobachtet werden, eine deutlich bessere Leistung als sonst abgeben. Es ist klar, dass mit Experimenten in der Regel größere Beeinflussungen verbunden sind, aber wenn es gelingt diese geeignet zu unterdrücken, was natürlich berechtigt bezweifelt werden kann, so muss es keinen essentiellen Unterschied in der Qualität der Beobachtung geben. Insofern hat Savage Recht; allerdings gibt es zwei wesentlichere Unterschiede.
Erstens kann man bei einem Experiment genauer bestimmen was man sieht. Natürlich kann man sich vorstellen, dass man Zeuge einer Beobachtungsserie wird, welche genau die Sachverhalte zeigt, die man eigentlich durch ein Experiment überprüfen wollte, was dieses dann obsolet macht. Jedoch muss man eine derartige Situation

[20] Eine größere Heterogenität erlaubt mehr Permutationen.

[21] Es sei nochmals erwähnt, dass sich die ersten Überlegungen zur gewissenhaften Durchführung von Experimenten bei Fisher [71] finden, jedoch ist er primär mit der Schilderung der Varianzanalyse beschäftigt.

eher als Ausnahme ansehen. Zudem können Experimente viel leichter wiederholt werden, gerade weil man einen aktiven Einfluss ausübt. Dies steht im Widerspruch zu der von Savage vertretenen Ansicht, dass es auch bezüglich der Wiederholbarkeit keine Unterschiede bei Beobachtung und Experiment gäbe. Dafür führt er als Beispiel an, dass man etwa eine Konstellation von Sternen am Nachthimmel wiederholt und ohne nennenswerte Probleme beobachten kann, wohingegen manche Experimente derart aufwendig sind, dass sie praktisch nicht reproduzierbar sind. Was er aber übersieht, ist, dass zwischen Experiment und Beobachtung eine Monotoniebeziehung besteht: Falls ein Experiment zur Herbeiführung einer Manifestation schon schwer zu realisieren ist, dann kann man noch viel weniger erwarten, dass man ohne Zutun Zeuge der dazugehörigen Beobachtung wird. Ein Eingriff in die Geschehnisse erhöht in jedem Fall die Wiederholbarkeit; wenn aber ein solcher nicht notwendig ist, dann umso besser. Im Beispiel des aufwändigen Experiments hätte man ohne eine Beeinflussung nicht einmal eine einzelne Instanz beobachten können.
Zweitens spielt noch ein gewisser praktischer Aspekt bei Experimenten mit, der an sich nichts mit der Qualität der Beobachtungen zu tun hat. Es ist nämlich notwendig einen gewissen Einsatzes zu leisten, um die Beobachtung herbeizuführen[22].

[22]Es versteht sich von selbst, dass der Grundeinsatz einer Beobachtung, die Einnahme eines gewissen Raum-Zeit-Bereiches und der Akt des Observierens, für beide Fälle notwendig ist.

6.2 Statistik

Um sich über die volle Aussagekraft von Statistik bewusst zu werden, besteht das Ziel dieses Abschnitts darin, sich die paradigmatischen statistischen Schlussweisen verständlich zu machen und dabei besonders darauf zu achten, wo vereinfachende Annahmen, damit sich der formale Rahmen der Wahrscheinlichkeitstheorie in effizienter Weise anwenden lässt, eingehen und Entscheidungen vom Anwender abverlangt werden, die keinen kanonischen Prinzipien unterworfen sind. Bei unserer Präsentation besteht entsprechend der historischen Entwicklung eine Zweiteilung in die Klassische Statistik und die sogenannte „Bayesianische Statistik", die sich erst später herausgebildet hat. Die statistischen Verfahren werden intuitiv erläutert, ohne dabei zu sehr in die technischen Details zu gehen, welche etwa dazu führten, dass man den Wald vor lauter Bäumen nicht mehr sieht. Trotz unserer anfänglich formulierten Absicht, nur endlich viele Alternativen zu betrachten, werden wir nun davon absehen, um im Einklang mit der Standardtheorie zu sein, welche üblicherweise Zahlen aus $\mathbb{R}$ als Ausprägungen von Variablen zulässt. Entsprechend der Dualität des Wahrscheinlichkeitsbegriffes können Kenngrößen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung als relative Häufigkeiten beziehungsweise Glaubensgrade verstanden werden. Oft wird diese Unterscheidung in der Statistik nicht sorgfältig gemacht, was sich daran zeigt, dass die Bezeichnung „Populationsparameter", welche eigentlich für den ersten Fall reserviert sein sollte, auch im zweiten angewendet wird; wo das formale Gerüst der Statistik beiden Anwendungsarten dient, wollen wir die entsprechenden Bezeichnungen, Populationsparameter beziehungsweise Verteilungsparameter, synonym verwenden.

6.2.1 Klassische Statistik

6.2.1.1 Grundlagen

Die Statistik ist in ihrer herkömmlichen Anwendungsart damit beschäftigt, den inversen Schluss, also den Schluss von Instanzen auf die Gesamtheit, zu vollziehen, was gerade durch eine Unmöglichkeit der Überprüfung einer gesamten Population oder bei Bestehen der Möglichkeit durch einen effizienten Ressourceneinsatz motiviert ist. Man geht dabei anfänglich von einer Hypothese und ihrem Komplement aus. Wir wollen jetzt nur „reine Tests" besprechen, bei denen man annimmt, dass die Form der Verteilung bekannt ist und sich die Hypothesen nur auf den Parameter dieser Verteilung beziehen. Bei den „komplexen Tests" ist sowohl der Parameter einer Verteilung als auch deren Form zu bewerten. Solche Tests sind deutlich komplizierter; unser Anliegen besteht jedoch darin, uns die einfachsten und weitverbreitetsten statistischen Testverfahren zu vergegenwärtigen. Nehmen wir zunächst an, dass ein Szenario mit zwei Punkthypothesen vorliegt, also Hypothesen, die jeweils einen bestimmten Wert für den fraglichen Parameter postulieren. Üblicherweise werden die komplementären Hypothesen als „Nullhypothese" H_0 und „Alternativhypothese" H_1 bezeichnet. Man möchte nun unter Verwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie

mit Hilfe der Beobachtung Rückschlüsse auf den Parameter führen. Für die Nullhypothese bestimmt man zwei Bereiche: Je nachdem in welchen Bereich die Beobachtung fällt wird sie angenommen oder verworfen, wobei eine Verwerfung von H_0 die Akzeptanz von H_1 nach sich zieht und umgekehrt. Der Wahl des Annahmebereiches[23] liegt jetzt folgende Überlegung zugrunde: Bezüglich der Entscheidung zugunsten einer Hypothese und Vorliegen des „wahren” Parameters sind vier Fälle möglich. Entweder man akzeptiert H_i bei Gültigkeit derselben oder dies geschieht bei Gültigkeit der komplementären Hypothese. Wenn man H_0 ablehnt, obwohl sie zutrifft, dann spricht man von einem „Fehler erster Art”, im entgegengesetzten Fall von einem „Fehler zweiter Art”. Je nach Annahmebereich für H_0 haben diese Fehler eine unterschiedliche Wahrscheinlichkeit. Generell gilt, dass es einen „tradeoff” zwischen diesen beiden Fehlerarten gibt: je größer der eine, desto kleiner der andere. Dementsprechend gilt es, eine optimale Balance zu finden. Es ist weit verbreitet, mit H_0 diejenige Hypothese zu bezeichnen, deren Verwerfung mit gravierenderen Konsequenzen verbunden ist, weshalb man oft vorgibt, dass der Fehler erster Art einen nach inhaltlichen Kriterien bestimmten Wert α (auch „Umfang” genannt) haben und der Wert β des Fehlers zweiter Art so klein wie möglich sein soll. Wenn man $1-\beta$ als „Stärke des Tests” bezeichnet, so gibt das Neyman-Pearson Lemma [162] für gegebenen Umfang einen Test maximaler Stärke an.
Für allgemeinere Hypothesen ist eine andere Verfahrensweise üblich: Man verwirft die Nullhypothese, falls unter ihr die Wahrscheinlichkeit die Beobachtung oder extremere Resultate zu erhalten kleiner als α ist, ansonsten behält man sie einfach bei[24]. Dieser Ansatz wird als „Signifikanztest” bezeichnet. Der Vollständigkeit halber ist zu erwähnen, dass es noch sogenannte „gemischte Tests” gibt, bei welchen bestimmte Beobachtungen zu einem weiteren statistischen Test führen. Eine kritische Diskussion dieser Vorgehensweise findet sich zum Beispiel in [152].
Wozu noch gar nichts gesagt wurde, ist die Bedeutung der Schranke α. Im sozialwissenschaftlichen Usus ist es verbreitet, bei Überschreitung der Schranke $0,05$ von einem „signifikanten” und bei Überschreitung der Grenze $0,01$ von einem „sehr signifikanten” Ereignis zu sprechen[25]. Man mag sich fragen, woher man auf die Idee kommt, gerade von fünf beziehungsweise einem Prozent als kritische Schwelle zu sprechen. Der Grund, der auch die weite Verbreitung von Prozentzahlen in anderen Bereichen erklärt, ist, dass Menschen geschichtlich betrachtet besonders unter Zuhilfenahme ihrer Hände zählten. Somit ist die Zehn noch überschaubar, jedoch stellt deren nächste Potenz schon eine „sehr große” Menge dar[26]. Damit wird unmittelbar klar, dass diese Schranken mehr als willkürlich gewählt sind.

[23] Der andere Bereich ergibt sich dann automatisch als Komplement.

[24] Es ist sorgfältig zwischen „nicht verwerfen können” und „bestätigen” zu unterscheiden, wobei Ersteres hier zutrifft. Man stelle sich etwa eine Beobachtung vor, die nur knapp unter der α-Fehler-Schranke war. Auch wenn sie nicht im Ablehnungsbereich lag, so wäre doch seltsam zu behaupten, dass die Beobachtung die Hypothese bestätigt hätte.

[25] Mit „Überschreitung der Schranke α” meinen wir, dass die Beobachtung die Grenze übertraf, die von der Restfläche der Wahrscheinlichkeitsverteilung mit Inhalt α induziert wurde.

[26] In dieser Hinsicht ist es natürlich von der nächsten Potenz und nicht dem nächsten Vielfachen der Zehn auszugehen.

Für die Anwendung von Statistik können die Daten in verschiedenen Skalen analysiert werden: nominal, ordinal oder auf einer Intervallskala. Bei einem nominalen Merkmal handelt es sich um eine binäre Größe, also es wird nur die Zugehörigkeit zu einer Gruppe oder das Vorhandensein einer Eigenschaft registriert. Wenn das Merkmal mehrfach gestuft ist und man noch eine Ordnung zwischen diesen Stufen hat, spricht man von einem ordinalen Merkmal. Wichtig ist hier zu bemerken, dass man zwar eine Rangabfolge hat, aber nicht die Abstände zwischen den einzelnen Stufen quantifiziert. Das heißt, man interessiert sich nur dafür, *ob* etwas größer ist, aber nicht um *wie viel*. Dies wird dann letztendlich auf einer Intervallskala erfasst, welche Auskünfte über die relativen Abstände erteilt. Nun ist aber zu bemerken, dass es im Allgemeinen nicht zutrifft, dass die verschiedenen Arten Daten zu erfassen mit ihren zugehörigen Auswertungsverfahren[27] zum gleichen Ergebnis führen müssen. Das zeigt, dass auch die Art der Datenerfassung einen nicht zu vernachlässigenden Einfluss auf die Folgerungen, die man zu ziehen geneigt ist, haben kann, was somit deren Relativität offenlegt. Im Weiteren wollen wir davon ausgehen, dass alle Daten in $\mathbb{R}$ intervallskaliert sind. Zudem setzen wir eine Vertrautheit mit den fundamentalsten Konzepten der Wahrscheinlichkeitstheorie wie Wahrscheinlichkeitsverteilungen[28], Erwartungswert[29] und Varianz[30] voraus. Eine Standardreferenz für die Klassische Statistik ist [20][31].

6.2.1.2 Ein typischer statistischer Test

Wir wollen uns nun eines der einfachsten Beispiele eines statistischen Vorgehens klarmachen: den Vergleich der Erwartungswerte zweier Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Die natürlichste Hypothesenwahl, die viele Fälle von Interesse abdeckt, ist die nach der Frage, ob die Erwartungswerte der zwei Stichproben, $\{x_i\}_{i=1,\dots,n}$ und $\{y_i\}_{i=1,\dots,n}$, zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen gleich (Nullhypothese) oder ungleich (Alternativhypothese) sind. Selbst wenn die Erwartungswerte übereinstimmten, kann man schwerlich erwarten, dass die Stichproben absolut identisch sein sollen. Um genau zu quantifizieren, wann man Unterschiede noch tolerie-

[27] Üblicherweise werden ordinale und intervallskalierte Werte mit Hilfe der Normalverteilung ausgewertet, wohingegen man für nominale Größen die χ^2-Verteilung anwendet, welche sich aus der Summe von Quadraten von unabhängig normalverteilten Zufallsvariablen ergibt.

[28] Hierbei handelt es sich um positive Funktionen p, deren Integral auf eins normiert ist. Die wichtigste kontinuierliche Verteilung stellt die Normalverteilung dar, welche durch $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$ mit den Parametern μ und σ gegeben ist, die gleichzeitig ihren Erwartungswert und ihre Standardabweichung darstellen.

[29] Der Erwartungswert gibt eine grobe Richtlinie für die Zentrierung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung. Dies wird erreicht, indem er jedes mögliche Resultat mit seiner Wahrscheinlichkeit gewichtet und dann aufsummiert: $\mu = \int xp(x)dx$. Er wird üblicherweise mit $E(X)$ bezeichnet, wobei X eine sogenannte „Zufallsvariable" ist, welche die Wahrscheinlichkeiten für die Resultate kodiert.

[30] Sie beschreibt die probabilistisch gewichtete Summe der quadrierten Abweichungen vom Erwartungswert μ, also $V(X) = \int (x-\mu)^2 p(x)dx$, was als Maß für die Streuung gilt. Warum dies eine geeignete Größe ist, um Abweichungen zu erfassen, wird weiter unten bei der Varianzanalyse erläutert. Die Standardabweichung ist die Quadratwurzel der Varianz: $\sigma = \sqrt{V(X)}$.

[31] Wir orientieren uns an der dort verwendeten Notation.

ren kann beziehungsweise wann diese Indizien für unterschiedliche Erwartungswerte sind, wendet man Statistik an. Man beginnt damit, für beide Stichproben den jeweiligen Mittelwert $\overline{x} = \sum x_i/n$ beziehungsweise $\overline{y} = \sum y_i/n$ zu bestimmen. Es wird dann überprüft, ob unter der Nullhypothese die Beobachtung in eine α-Restfläche fällt. Dabei müssen mehrere Dinge beachtet werden.

Der Großteil der Statistik basiert auf dem sogenannten „Zentralen Grenzwertsatz", welcher aussagt, dass sich für jede beliebige Wahrscheinlichkeitsverteilung bei einer entsprechenden Normierung die Mittelwerte von „unendlich" vielen unabhängigen Beobachtungen normal verteilen. Dies wird für die Wahrscheinlichkeitsverteilung angewendet, welche aus der Differenz der zu den Stichproben assoziierten Zufallsvariablen resultiert, denn damit weiß man ja dann, dass die komplementären Hypothesen bezüglich der neuen Zufallsvariablen Y die Frage nach dem Erwartungswert null stellen, womit dieser für die Normierung dann bekannt ist (das ist der erste notwendige Parameter). Da die Normalverteilung ein Limesobjekt im mathematischen Sinne darstellt, ist klar, dass sie nur als Näherung für größere Stichproben verwendet wird, was aber nicht vollständig exakt ist. Dass man darüber hinweg sieht, ist dadurch begründet, dass kein Wissen über die „tatsächliche" Wahrscheinlichkeitsverteilung verlangt wird und in dem Verständnis von inferentieller Statistik als effizienter deskriptiver Statistik ist dies sogar essentiell. Zur Anwendung dieser Näherung wird auch noch der zweite Parameter, die Standardabweichung des Mittelwertes von unabhängigen identischen Kopien von Y, benötigt, um die korrekte Normierung durchführen zu können, da die Normalverteilung vollständig durch den Erwartungswert und die Standardabweichung beziehungsweise Varianz beschrieben wird. Jedoch kann die Standardabweichung nur geschätzt werden. Zwar konvergiert die Schätzung für eine wachsende Zahl an Beobachtungen gegen die tatsächliche Standardabweichung, aber bei endlichen Stückzahlen liegt notwendigerweise eine erneute Näherung vor.

Bei der Schätzung muss man beachten, ob man zwischen den Stichproben eine Beziehung oder Unabhängigkeit vermutet, denn je nach Zusammenhangsart resultiert eine andere Streuung. Um zu überprüfen, ob eine nennenswerte Abhängigkeit vorliegt, bedient man sich der Korrelation $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})/n$. Diese misst den linearen Zusammenhang zweier Größen, was bedeutet, dass bei Bestehen einer komplizierteren Abhängigkeit, etwa polynomial höherer Ordnung, die Korrelation trotzdem gering sein kann. Bei Verwendung dieses Kriteriums geht man davon aus, dass im Wesentlichen nur lineare Zusammenhänge von Bedeutung sind. Grundsätzlich ist aber festzustellen, dass ein weiterer statistischer Test zur Validierung des eigentlichen Vorgehens notwendig wird.

Im Fall der Unabhängigkeit ist für die Schätzung der Standardabweichung einzubeziehen, ob die den beiden Stichproben zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen homogene Varianzen aufweisen. Falls die Varianzen nicht homogen, also nicht annähernd identisch, sind, muss eine Korrektur der Freiheitsgrade, welche die Anzahl der Beobachtungen beschreibt, einfließen. Diese Voraussetzung muss wiederum mittels eines weiteren statistischen Verfahrens überprüft werden. Nicht nur handelt es sich hierbei erneut um eine Validierung mittels Wahrscheinlichkeiten, sondern damit der betreffende Test funktioniert, müssen gegebenenfalls wieder bestimmte Voraussetzungen erfüllt sein[32]. Bis jetzt gingen wir implizit von gleichen Stichprobengrößen aus. Auf unterschiedliche Stichprobengrößen reagiert der Test bei ansonsten homogenen Varianzen robust[33], jedoch kann auch diese Verfälschung letztendlich zu einer konträren Entscheidung führen. Falls aber ungleiche Stichprobenumfänge und inhomogene Varianzen vorliegen, muss ein ausgereifteres Korrekturverfahren gewählt werden. Dazu stehen mehrere Ansätze bereit, von denen sich aber keiner eindeutig auszeichnen lässt.

Das eben geschilderte Vorgehen basierte auf dem Zentralen Grenzwertsatz, welcher geradezu das Hauptfundament der Statistik bildet. Wie bereits bemerkt wurde, kann damit die Normalverteilung bei einer großen Anzahl an Untersuchungseinheiten als Näherung eingesetzt werden. Nun ist es aber so, dass in vielen Fällen, sei es aus Effizienzüberlegungen oder schlichtweg aus mangelnder Realisierbarkeit, keine ausreichenden Stückzahlen vorhanden sind, um diese Näherung guten Gewissens anwenden zu können, aber man trotzdem einen statistischen Test durchführen möchte. Der Vorteil beim bisherigen Verfahren bestand ja darin, dass man kein Wissen über die gültige Wahrscheinlichkeitsverteilung einzusetzen brauchte; jedoch muss man bei geringen Stichprobenumfängen auf solches zurückgreifen und die Verteilung könnte eine absolut beliebige Form haben. Üblicherweise geht man von einer Normalverteilung aus, wozu ein weiterer statistischer Test herangezogen wird[34]. Falls die Normalverteilung nicht zutrifft, müsste man eigentlich solange nach Verteilungsformen testen, bis man eine gefunden hat, deren Übereinstimmung nach einer (willkürlich) festgelegten Schranke gut genug ist.

6.2.1.3 Varianzanalyse

Ein ausgereifteres statistisches Testverfahren stellt die sogenannte „Varianzanalyse" dar, deren Idee in Fisher's „Design of Experiments"[71] mehr oder weniger informell geschildert wird. Während es dem Biologen Fisher vornehmlich um landwirtschaftliche Anwendungen ging[35], stellt die Varianzanalyse heutzutage die beliebteste Testform in den Sozialwissenschaften und der Psychologie dar. Im Geiste orientiert sie sich an den sogenannten „Induktiven Methoden" von Mill [156], wobei zu bemerken

[32]Etwa wenn man den „F-Test" verwendet, muss man direkt die Normalverteilung annehmen, was man eigentlich vermeiden wollte. Der F-Test basiert auf der F-Verteilung, welche sich aus dem Quotienten von durch ihre Freiheitsgrade normierten χ^2-verteilten Zufallsvariablen ergibt.

[33]Für unterschiedliche Stichprobengrößen n_1 und n_2 kann weiterhin der Zentrale Grenzwertsatz aufgrund folgender Überlegung angewendet werden: Die zu den Mittelwerten bezüglich n_1 und n_2 korrespondierenden Zufallsvariablen X_1 und X_2 sind wegen der großen Stichprobenumfänge annähernd normalverteilt, weshalb es auch für ihre Differenz gilt.

[34]Für gewöhnlich greift man dabei auf einen χ^2-Test zurück.

[35]Diese erläutert er dort zusammen mit Überlegungen zum experimentellen Design. Sein anfängliches Beispiel der sogenannten „tea tasting lady" zielt vor allem auf den Unterhaltungswert ab: Man solle überprüfen, ob sie tatsächlich am Geschmack eines mit Milch versetzten Tees erkennen könne, ob zuerst der Tee oder die Milch in die Tasse gegossen wurde.

ist, dass es sich bei den Methoden selbst um rein deduktive Vorgehensweisen handelt und nur der dann vollzogene Schluss induktiver Natur ist. Grundsätzlich geht es darum, dass ein bestimmtes Merkmal mehrere potentielle Einflussfaktoren aufweist. Durch verschiedenste Variationen dieser Faktoren möchte man schließlich darauf kommen, welche davon tatsächlich für die Beobachtungen verantwortlich sind. In der Varianzanalyse wird diese Idee aufgegriffen und genauer mit Hilfe einer zugrunde liegenden probabilistischen Modellierung untersucht.
Um die grundlegenden Ideen zu schildern, beschränken wir uns auf die „univariate zweifaktorielle Varianzanalyse", was bedeuten soll, dass der Einfluss von zwei Faktoren A und B auf eine abhängige Variable untersucht wird. Bezüglich des Experimentes werden die Ausprägungen der Faktoren vorgegeben und die Werte der abhängigen Variablen beobachtet. Die Varianzanalyse lässt sich allgemeiner auf beliebige (endliche) Anzahlen von unabhängigen und abhängigen Variablen anwenden; aber wir wollen uns den eben erwähnten Fall vornehmen, da die Notation verhältnismäßig einfach bleibt und im Gegensatz zur univariaten einfaktoriellen Varianzanalyse dennoch die Thematik der Interaktionseffekte zwischen den einzelnen Faktorstufen berührt wird.
Man nimmt zunächst an, dass jeder Faktor eine bestimmte Anzahl an Ausprägungen (Faktorstufen) hat, um eine unterschiedliche Wirkung hervorzurufen (diese sei als p für den ersten und q für den zweiten Faktor bezeichnet). Damit alle denkbaren Abhängigkeiten erfasst werden, lässt man alle Kombinationen der Faktorausprägungen, also $p \times q$ an der Zahl, wirken. Jedoch begnügt man sich nicht mit einer einzelnen Beobachtung pro Kombination. Da man ja von man einer probabilistischen Modellierung ausgeht, möchte man durch Wiederholungen ein repräsentativeres Verhalten erzeugen. Somit führt man pro Kombination etwa n Messungen durch, womit man dann als Datenmaterial eine $p \times q \times n$ Hypermatrix mit Einträgen x_{ijm} erhält. Die strukturierte Evaluation der unterschiedlichen Einflüsse vollzieht sich dann in mehreren Schritten. Zuerst bildet man für jede Faktorstufenkombination ij, $1 \leq i \leq p\,, 1 \leq j \leq q$ (auch Zelle genannt), deren Mittelwert $AB_{ij} = \sum_{m=1}^{n} x_{ijm}/n$, weil dies die feinste Unterscheidung bezüglich der Faktoren ist. Mit der univariaten zweifaktoriellen Varianzanalyse werden zwei Arten von Hypothesen überprüft: Einerseits, ob die beobachteten Unterschiede zwischen den einzelnen Faktorstufen wirklich einen tiefer liegenden Grund haben und nicht nur auf Zufälligkeiten zurückzuführen sind, und andererseits, ob gleiches für die Interaktion zwischen den Faktorstufen gilt[36]. Mit Letzterem ist die Frage gemeint, ob die Faktoren unabhängig ihren Beitrag zu der Beobachtung leisten oder miteinander irgendwie wechselwirken. Grundlegend ist nun die Idee alle Unterschiede in den Beobachtungen auf einzelne Faktoren, deren Interaktionen und zufällige Fehler zurückzuführen. Die Gesamtabweichung Q_T berechnet sich als Summe der quadrierten Abweichungen[37] der Be-

[36]Damit liegen hier drei Hypothesenpaare vor.
[37]Diese Wahl ist durchaus naheliegend, wenn man sich bewusst macht, dass man mit einfachen Differenzen vom Mittelwert nichts erreichen würde, da sich die positiven und negativen Überhänge auf null aufsummieren. Wenn man zu den Quadraten übergeht, kann das nicht mehr passieren. Es ist in gewisser Weise natürlich die erste gerade Potenz hierfür zu wählen.

obachtungen x_{ijm} vom Gesamtmittelwert $G = \sum_{ij} AB_{ij}/pq$. Wenn wirklich keinerlei Einfluss von Faktoren und Fehlern vorläge, wären alle Beobachtungen identisch und die Gesamtabweichung null. Als Maß für den Einfluss der einzelnen Faktoren werden die Summen der quadrierten Abweichungen der Faktorstufenmittelwerte $A_i = \sum_{j=1}^{q} AB_{ij}/q$ und $B_j = \sum_{i=1}^{p} AB_{ij}/p$ von G, Q_A und Q_B, herangezogen[38], welche man im Fachjargon als „Treatmentsummen" bezeichnet, was wiederum dadurch begründet ist, dass, wenn es keinen nennenswerten Einfluss der Faktorstufen gäbe, diese sehr klein wären. Konsequenterweise wird dann die Variation aufgrund von Interaktionseffekten mit der Summe $Q_{A\times B}$ der Quadratabweichungen der Zellenmittelwerte von den Werten $A_i + B_j - G$ erfasst, da sich diese bei Unabhängigkeit, also additiver Wirkung, ergäben. Q_A, Q_B und $Q_{A\times B}$ erfassen die Variationen, welche man sich strukturiert erklären kann. Der Rest wird als Fehlerquadratsumme klassifiziert: $Q_F = Q_T - Q_A - Q_B - Q_{A\times B}$. Um einzuschätzen, wie signifikant die strukturiert erklärbaren Variationen sind, werden sie jeweils mit Q_F in Beziehung gesetzt. Mit diesen Quotienten wird dann entschieden, ob die unterschiedlichen Faktorstufen von A beziehungsweise B tatsächlich Unterschiede induzieren und ob Interaktionseffekte vorhanden sind.

Die probabilistische Modellierung der drei Hypothesen, welche unabhängig voneinander prüfbar sind, geht davon aus, dass die Beobachtungen unter einer Faktorstufe jeweils einer gemeinsamen Population entstammen, die durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung mit zugehörigem Erwartungswert μ_i beziehungsweise ν_j charakterisiert ist. Wenn man die jeweiligen Quadratsummen geeignet durch ihre Freiheitsgrade normiert, erhält man Schätzer für Varianzen im probabilistischen Verständnis und kann einen F-Test für die jeweiligen Nullhypothesen ansetzen, welche lauten, dass alle μ_i beziehungsweise ν_i identisch sind und sich die Zellenerwartungswerte additiv zusammensetzen[39]. Damit wird zunächst nur eine Entscheidung herbeigeführt, ob diese Nullhypothesen zu verwerfen sind. Wenn man dann genauer auf den oder die Urheber der Abweichungen folgern möchte, muss man noch passende Einzelvergleiche durchführen, denn es könnte der Fall sein, dass alle bis auf einen der μ_i identisch sind, was bedeutet, dass nur dieser die Varianzen verursachte.

Diese Prozedur basiert auf einigen essentiellen Annahmen, die nun dargestellt werden sollen. Erstens ist es für die Anwendung des F-Tests notwendig, dass sich die Fehlerkomponenten innerhalb einer Zelle normal verteilen. Wie bereits oben erklärt wurde, ist die Normalverteilungsannahme mittels eines χ^2-Tests prüfbar, der aber wiederum statistischer Natur ist. Zweitens müssen die Fehlerverteilungen in den einzelnen Zellen mit annähernd gleicher Varianz streuen, was nicht selbstverständlich ist. Auch hier muss ein weiterer Test herangezogen werden[40], um die Validität homogener Varianzen zu überprüfen. Und drittens nutzt man bei der Addition der Abweichungsquadrate aus, dass die Fehlerkomponenten unabhängig voneinander sind.

[38] Dabei wird jede Messung x_{ijm} durch ihren entsprechenden Faktorstufenmittelwert ersetzt.

[39] Genauer gesagt soll für sie in Zelle ij $\mu_i + \nu_j - \mu$ gelten, wobei der Gesamterwartungswert μ durch G geschätzt wird. Obwohl man sich eigentlich für Erwartungswerte interessiert, wird trotzdem der F-Test herangezogen, da er Summen quadrierter Abweichungen geeignet in Beziehung setzt.

[40] Für Details sei auf unsere Referenz [20] verwiesen.

Aber nur weil man keine Abhängigkeiten „kennt", ist noch lange nicht garantiert, dass auch tatsächlich keine vorhanden sind. Man kann nicht einfach die Suboptimalität seiner epistemischen Perspektive zur Begründung von weitreichenden Folgerungen über die Welt heranziehen. Das wäre genau so, als ob man sich wie ein Kind die Hände vor die Augen hält und dann aus dem Umstand, dass man andere Menschen nicht sehen kann, folgert, dass auch sie einen nicht wahrnehmen. Grundsätzlich sind Verletzungen dieser Voraussetzungen bei wachsendem Stichprobenumfang n zu vernachlässigen; aber selbst wenn dieser „groß" ist, kann es unter anderem den entscheidenden Unterschied machen.
Die eben erwähnten Annahmen sind immer für eine Varianzanalyse notwendig. Falls es aber nicht zutrifft, dass in jeder Zelle der gleiche Stichprobenumfang realisiert wird, geht die „Orthogonalität" der Haupt- und Kombinationseffekte verloren[41]. Dies kann in der Praxis durchaus vorkommen, etwa weil ein einheitlicher Stichprobenumfang aufgrund von Kostengründen abwegig ist, sich nicht genügend passende Untersuchungseinheiten finden lassen oder einfach Daten verloren gehen. Verschiedene Korrekturansätze stehen bereit, deren Wahl nicht eindeutig vorgegeben ist. Tatsächlich weisen bestimmte Korrekturmethoden einen Hang zu progressiven Entscheidungen auf[42].
Die gerade beschriebene zweifaktorielle univariate Varianzanalyse lässt sich dann kanonisch auf beliebige endliche Anzahlen von unabhängigen Faktoren verallgemeinern. Man erhält einfach eine dementsprechend höherdimensionale Hypermatrix. Was jedoch dann hinzukommt, sind die sogenannten „Interaktionen höherer Ordnung": Während es bei zwei Faktoren ja nur eine Interaktionsart gab, ist es jetzt möglich, dass die Faktoren komplizierter miteinander interagieren. Es kann etwa sein, dass gewisse Faktorstufen von A und B erst zusammen mit einer bestimmten Faktorstufe eines weiteren Faktors C für einen neuen Effekt verantwortlich sind. Die weitergehende Verallgemeinerung der mehrfaktoriellen univariaten Varianzanalyse auf die mehrfaktorielle multivariate Varianzanalyse, die den Einfluss auf mehrere abhängige Variablen gleichzeitig untersucht, vollzieht sich dann durch den Übergang von skalaren zu genuin vektoriellen Beobachtungsgrößen[43]. Demnach übertragen sich die Annahmen vom univariaten auf den multivariaten Fall kanonisch: Die Fehlerkomponenten in den Zellen sollen nun unabhängig voneinander multivariat

[41] Dies lässt sich am einfachsten durch eine Darstellung der Varianzanalyse im formalen Rahmen des sogenannten „Allgemeinen Linearen Modells" veranschaulichen.

[42] Testverfahren werden als konservativ bezeichnet, wenn sie tendenziell die Nullhypothese, Faktorstufen haben den gleichen Effekt, bevorzugen. Falls das Gegenteil der Fall ist, spricht man von Progressivität.

[43] Die Redeweise von „unabhängigen" und „abhängigen" Variablen ist in dem Sinne zu verstehen, dass die unabhängigen Variablen die abhängigen beeinflussen. Damit wird aber keinesfalls ausgeschlossen, dass die Sätze der abhängigen und unabhängigen Variablen untereinander abhängig sein können. Im obigen Teil nahmen wir aus Gründen der Einfachheit an, dass die unabhängigen Faktoren, also diejenigen, die ein abhängiges Merkmal beeinflussen, auch untereinander unabhängig waren. Zur Aufdeckung von Redundanzen kann man eine „principal component analysis" (PCA) versuchen.

normalverteilt[44] sein und homogene Kovarianzmatrizen aufweisen.

Wenn nun eine Varianzanalyse nicht zur Ablehnung einer der Nullhypothesen führt, kann dies zwei Gründe haben: Entweder haben die einzelnen Faktorstufen wirklich keinen unterschiedlichen Einfluss oder die Fehlerquadratsumme war zu groß. Es ist genauer zu betrachten, wie diese Problematik entsteht und sie umgangen werden kann. An sich ist es vernünftig, nach dem „Prinzip vom hinreichenden Grund" von Leibniz davon auszugehen, dass jede Wirkung eine Ursache haben muss. Bei komplexen Zusammenhängen sind immer eine Unmenge von Faktoren beteiligt. Es wäre ineffizient und unnötig deren Gesamtheit zu erfassen, denn es reicht, wenn man sich auf die beschränkt, welche verhältnismäßig die größten Beiträge liefern. Die restlichen Faktoren können dann ob ihres zu vernachlässigenden Einflusses tatsächlich als Fehlerkomponenten bezeichnet werden. Damit dies funktioniert, muss man mögliche Ursachen nach ihrem potentiellen Beitrag klassifizieren. Wenn etwa ein bestimmtes Merkmal hauptsächlich zu gleichen Teilen von drei Faktoren abhängig ist und man nur zwei von ihnen in einer Varianzanalyse testet, so kann der ausgelassene Faktor bei einer zufälligen Auswahl mehrmals instantiiert werden und trägt wegen seiner Bedeutung erheblich zu den beobachteten Variationen bei. Dies erhöht dementsprechend die Fehlerquadratsumme und lässt die Wirkung der untersuchten Faktoren, auch wenn sie, wie gerade beschrieben, einen starken Einfluss haben, nicht signifikant erscheinen. Man merkt damit, dass die Varianzanalyse nicht funktioniert, wenn man kein ausreichendes Situationsverständnis hat. Es ist nicht so, dass man einfach eine Varianzanalyse mit einer beliebigen Anzahl von Faktoren durchführt und dann problemlos deren Rolle ermitteln kann. Man muss schon ziemlich genau wissen, wonach man sucht. Ansonsten kann es vermehrt der Fall sein, dass einen die Durchführung einer Varianzanalyse nicht voranbringt. Davon ausgehen, dass man bedeutsame Faktoren gefunden hat, kann man nur, wenn die Variationen der Treatmenteffekte im Vergleich zu den Fehlervariationen groß sind. Somit sieht man dann auch ein, dass ein solches statistisches Vorgehen an sich keine Erklärungen liefert, sondern nur Erklärungsversuche erhärten kann.
Man kann versuchen eine drohende Falschbewertung von Einflüssen durch eine Vergrößerung der Anzahl der untersuchten Faktoren abzuwenden, da sie zu einer Verfeinerung der Instrumente zur Offenlegung der Wirkungsmechanismen führt. Daneben gibt es aber noch zwei andere Möglichkeiten. Erstens kann man versuchen, eine größere Homogenität der Untersuchungseinheiten sicherzustellen, damit unerwünschte Variationsquellen ausgeschlossen werden. Allerdings ist dies eher unbefriedigend, da die Generalisierbarkeit der Untersuchung darunter leidet; denn diese ist dann vernünftigerweise nur für weitere Exemplare mit eben diesen Eigenschaften gewährleistet. Zudem hat man ja schon bereits erkannt, dass weitere Faktoren eine Rolle spielen. Diese werden dann nicht ergründet, sondern unterdrückt. Bei der zweiten Möglichkeit kann eine bessere Generalisierbarkeit sichergestellt werden:

[44]Hierzu ist zu bemerken, dass sich ein Nachweis für die multivariate Normalverteilung deutlich schwieriger gestaltet als im eindimensionalen Fall.

Die „Kovarianzanalyse" erreicht das dadurch, dass eine zusätzliche Kontrollvariable erhoben wird, welche aufgrund einer signifikanten Korrelation mit der zu beobachtenden Größe zu den unerwünschten Variationen beiträgt. Erst nachdem dieser Einfluss mit Hilfe von Regressionsrechnung linear „herauspartialisiert"[45] wurde, wird eine Varianzanalyse durchgeführt. Dieses Vorgehen ist mit einer weiteren Annahme verbunden: Man muss überprüft haben, ob die Steigungen der Regressionsgeraden, welche innerhalb der einzelnen Zellen gebildet werden, homogen sind, was wiederum approximativ mit einem F-Test geschehen kann[46]. Hat man sich jedoch davon überzeugt, so stellt im Falle, dass bestimmte Einflüsse nicht Gegenstand der Untersuchung sein sollen, die Kovarianzanalyse eine effizientere Alternative zu einer Verfeinerung der Varianzanalyse dar, denn bei einem mehrfaktoriellen Plan kann die Zahl der benötigten Untersuchungseinheiten exponentiell anwachsen.
Eine besondere Ausprägung der Varianzanalyse liegt vor, wenn die Untersuchungseinheiten nicht vollständig zufällig aggregiert wurden, sondern aus Gründen der Effizienz die Treatmenteffekte an den gleichen Untersuchungseinheiten getestet werden. Damit ist dann offensichtlich die Annahme der Unabhängigkeit der Fehlerkomponenten nicht mehr erfüllt, da sich bestimmte für die Untersuchungseinheiten charakteristische Merkmale unter den Faktorstufen erneut reproduzieren. Falls die Messergebnisse unter den einzelnen Faktorstufen eine homogene Korrelation aufweisen, kann eine eigens dafür zugeschnittene Variante der Varianzanalyse angewendet werden, die bei den Abweichungsquadraten der Fehler solche vernachlässigt, welche auf Unterschiede zwischen den Untersuchungseinheiten zurückgehen. Im Vergleich zur Varianzanalyse mit Wiederholung stellt sich die Kovariananalyse als allgemeineres Verfahren heraus, da hierbei auch sequentielle Effekte in den Untersuchungseinheiten erfasst werden können. Im Falle, dass diese nicht vorliegen, können beide Verfahren angewendet werden, allerdings führen sie wiederum nur zu „vergleichbaren", aber nicht identischen Ergebnissen.

6.2.1.4 Zwischenfazit

Schon bei einem der einfachsten statistischen Tests gingen eine zugegebenermaßen überraschende Anzahl an Näherungen und Präsuppositionen ein und das zusätzlich zu dem Sachverhalt, dass mit einem inferierten Parameter die Verhältnisse kritisch betrachtet bestenfalls vage sind, falls das untersuchte Merkmal einen komplizierteren Status hat, wie es in den Sozialwissenschaften und der Psychologie üblich ist. Wenn die sich aufgrund des Parameters ergebenden Wahrscheinlichkeiten weiterhin zu einer Voraussage verwendet werden sollen, muss eine gewisse Uniformität der Welt

[45]Trotz dieser erschreckenden Terminologie sollte intuitiv klar sein, was hier passiert. Eine lineare Regressionsgleichung, welche den trotz Einwirkung von nicht zu eliminierenden zufälligen Fehlern ungefähren besten linearen Zusammenhang zweier Größen bestimmt, wird zur Bereinigung der Messwerte herangezogen.

[46]Den gleichen Test muss man auch zur Überprüfung der Korrelation der Kontrollvariablen mit der Beobachtungsvariablen heranziehen, da ansonsten die Regression statt zur Vermeidung von Fehlern zu weiteren Störungen führt.

gelten: Beispielsweise lernt jeder Mensch kontinuierlich dazu und übt, was zu Recht die Frage nach der Konstanz von jeglicher Art von Leistung aufwirft, denn durch diese Übung kann sich offenbar die Wahrscheinlichkeitsverteilung, die das Auftreten seiner Leistungen modelliert, verändern. Natürlich gibt es noch einfachere Tests als den zum Vergleich zweier Erwartungswerte, etwa die Ermittelung eines Populationsparameters aufgrund einer Stichprobe, wo man sich keine Gedanken um die mögliche Korrelation zweier Größen und deren homogene Varianzen zu machen braucht, aber wenn sich Statistik nur darauf beschränken wollte, wäre ihr Erklärungsanspruch sehr gering. Zur Durchführung von üblichen statistischen Tests müssen neben der Verwendung von Näherungen gewisse Voraussetzungen überprüft werden. Dies geschieht aber wiederum mit statistischen Tests, die möglicherweise erneut mit gewissen Voraussetzungen behaftet sind. Falls diese nicht bestätigt werden und man trotzdem weiterhin an der speziellen Testart festhalten will, muss man ein Korrekturverfahren wählen. Bei diesen gibt es aber oft keine eindeutige Direktive and die konkrete Wahl obliegt dem Anwender. Eine solche Wahl zwischen Alternativen mit potentiell unterschiedlichem Ausgang muss aber nicht erst bei einer Korrektur auftreten, sondern kann schon anfänglich bestehen. Da unterschiedliche statistische Verfahren, deren Anwendbarkeit durchaus begründet ist, zu verschiedenen Ergebnissen führen können, muss man feststellen, dass das Resultat eines statistischen Vorgehens demnach tatsächlich von einer subjektiven Wahl des Verfahrens abhängt. Gerade im Gegensatz zu rein mathematischen Problemen, wo jeder unterschiedliche Lösungsansatz das gleiche Ergebnis zu Tage fördert, spielt hier die Vorgehensweise eine für das Endergebnis nicht zu vernachlässigende Rolle.

6.2.2 Bayesianische Statistik

6.2.2.1 Fundamentale Idee

Die bisher geschilderte Vorgehensweise der Statistik wird als Klassische Statistik bezeichnet und ihre Anfänge gehen auf Neyman, Pearson und Fisher zurück. Alternativ hierzu hat sich später die „Bayesianische Statistik" entwickelt[47], welche substantiell auf der Formel von Bayes aufbaut. Während es im klassischen Fall darum ging, die Wahrscheinlichkeit einer Beobachtung und extremeren Resultaten in Abhängigkeit von einem unbekannten Parameter zu bestimmen und durch Abgleich mit der Beobachtung nur Daten verwendete, die aus dieser resultierten, geht der bayesianische Ansatz weiter und bezieht noch gewisse Vorkenntnisse in Form von Priorwahrscheinlichkeiten mit ein. Eine gewisse Notwendigkeit, den klassischen Weg zu verlassen, wird oft durch eine Kritik von Jeffreys begründet: „What the use of P [Signifikanzschwelle] implies, therefore, is that a hypothesis that may be true may be rejected because it has not predicted observable results that have not occured.". Damit ist gemeint, dass für die Festsetzung der Signifikanzwahrscheinlichkeit immer schon extremere Werte eine Rolle spielen, die de facto aber gar nicht beobachtet wurden. Fisher selbst bezeichnete jedoch die Verwendung der Formel von Bayes in [71] als „unwissenschaftlich". Seine kurzangebundene Kritik kann sich nur darauf bezogen haben, dass die Priorwahrscheinlichkeiten eine zu eminente Rolle spielen. Wir versuchen nun nachzuvollziehen, warum sie so schwierig festzusetzen sind und welchen Einfluss sie ausüben können.

Die bayesianische Methodik wird nun für die Beurteilung von komplementären Hypothesen geschildert[48]. Ein Parameter μ gehört entsprechend der Nullhypothese und ihrer Alternative einer von zwei Mengen H_0 oder H_1 an. Nun ist man aufgefordert, Vorkenntnisse über den Parameter durch eine Priorwahrscheinlichkeitsverteilung $P(\mu)$ auf allen möglichen Werten zu kodieren[49]. Dementsprechend haben die beiden Hypothesen die Priorwahrscheinlichkeiten $\pi_0 = \int_{H_0} P(\mu)d\mu$ und $\pi_1 = \int_{H_1} P(\mu)d\mu$. Wenn wir davon ausgehen, dass der Einfluss des Parameters auf die Wahrscheinlichkeit[50] der Beobachtung x durch $P(x|\mu)$ erfasst wird, sagt uns die Formel von Bayes, dass $P(\mu|x) \propto P(\mu)P(x|\mu)$ gilt, also sich die Wahrscheinlichkeit nach der Beobachtung, auch Posteriorwahrscheinlichkeit genannt, proportional zu dem Produkt aus Priorwahrscheinlichkeit und Likelihood[51] ergibt. Anstatt nun irgendwelche

[47] Die Standardreferenzen sind [135], [149] und [26].

[48] Bei der Notation halten wir uns größtenteils an [135].

[49] In seinem Artikel „Where do Bayesian Priors come from?" [227] untersucht Suppes, anstatt normative Kriterien aufzustellen, nur welche Assoziationsmuster beziehungsweise -wege typischerweise bei Menschen ablaufen und kann insofern keinen Beitrag zu der Frage leisten, wie man diese am besten begründet.

[50] Streng genommen handelt es sich lediglich um Funktionswerte einer Wahrscheinlichkeitsverteilung, aber die ungewissenhafte Verwendung dieser Bezeichnung ist in der Fachliteratur durchaus üblich.

[51] Man bezeichnet $P(x|\mu)$ als Likelihoodfunktion, was man auch oft als $l(\mu|x)$ schreibt. Zudem kommt es häufig vor, dass man aus rechnerischen Gründen den Logarithmus davon, $L(\mu|x) = log(l(\mu|x))$, betrachtet.

Signifikanzgrenzen zu spezifizieren, geht es allein darum, wie die Beobachtung die anfänglichen Wahrscheinlichkeiten π_0 und π_1 zu den Posteriorwahrscheinlichkeiten $p_0 = \int_{H_0} P(\mu|x)d\mu$ und $p_1 = \int_{H_1} P(\mu|x)d\mu$ abändert. Um diese Änderung geeignet zu erfassen, führt man den „Bayesfaktor" $B = (p_0/p_1)/(\pi_0/\pi_1)$ ein. Dieser lässt sich mit Hilfe der auf den Hypothesenmengen induzierten Wahrscheinlichkeitsverteilungen ρ_0 und ρ_1[52] als

$$B = \frac{\int_{H_0} P(x|\mu)\rho_0(\mu)d\mu}{\int_{H_1} P(x|\mu)\rho_1(\mu)d\mu}$$

schreiben[53]. Dieser Faktor bildet nun die Grundlage, von der aus man weitere Entscheidungen trifft.

Der bayesianische Ansatz möchte somit aktiv etwaiges Vorwissen einbeziehen, welches durchaus fundiert sein kann. Aber manchmal hat man nur eine vage Vermutung, etwa wenn bestehende Meinungen absolut widersprüchlich oder nicht fest verankert sind, weshalb man Unwissen geeignet in einer Referenzpriorwahrscheinlichkeitsverteilung kodieren möchte. Dies ist aber nicht so eindeutig lösbar, wie man vielleicht denken mag. Zuerst könnte man auf die Idee kommen, das Unwissen als uniforme Priorwahrscheinlichkeitsverteilung zu repräsentieren, denn dann wird kein Wert bevorzugt. Im Falle, dass der fragliche Parameter die Erfolgswahrscheinlichkeit einer Bernoulli-Verteilung ist, geht dieser Vorschlag schon auf Bayes zurück. Erstreckt sich der spezifische Parameter nicht wie im gerade genannten Beispiel über eine beschränkte Menge, so wählt man sogenannte „improper priors", die uniform auf der ganzen reellen Achse sind. Diese konstituieren dann natürlich kein Wahrscheinlichkeitsmaß mehr; doch dies stellt insofern kein Problem dar, als dass sie mit einer Likelihoodfunktion ein echtes Wahrscheinlichkeitsmaß als Posteriorverteilung ergeben können. Improper Priors soll man sich grundsätzlich als Approximation von Verteilungen vorstellen, die über ein extrem großes Intervall gleichmäßig verteilt sind. Mit solchen Priorwahrscheinlichkeiten resultiert die durch eine Beobachtung erlangte Information in einem deutlichen Erkenntnisgewinn, da die Likelihoodfunktion die Priorwahrscheinlichkeitsverteilung offensichtlich „dominiert".

Wenn man jedoch an die Problematik des „Bertrand Paradoxes" denkt[54], erkennt man, dass Transformationen von uniform verteilten Variablen nicht ohne weiteres wieder eine uniforme Verteilung ergeben. Deshalb gilt es genauer zu spezifizieren, auf welcher Ebene die uniforme Verteilung angesetzt werden soll. Ein Vorschlag dazu stützt sich auf „data-translation" und „suffiziente Statistiken": Wenn sich die Likelihoodfunktion $l(\mu|x)$ als $f(\psi(\mu) - t(x))$ schreiben lässt, wobei t eine suffiziente Statistik bezeichnet[55], dann lässt die Beobachtung die Form der Likelihoodfunktion unverändert und bestimmt nur die Lokalisierung des Parameters (des-

[52] Es gilt $\rho_i(\mu) = P(\mu)/\pi_i$ für die jeweiligen Mengen.

[53] Falls die Hypothesenmenge nur ein Element hat, so zählt allein der Wert der Likelihoodfunktion an der betreffenden Stelle, also das Integral ist dann im distributionellen Sinne zu deuten.

[54] Dieses wurde in Kapitel 2 Unterabschnitt 1.1 vorgestellt.

[55] Eine Funktion f der Beobachtung x ist genau dann suffizient, wenn $l(\mu|x) \propto l(\mu|f(x))$ gilt. Damit liefert der Funktionswert allein die im Rahmen der Bayes-Formel relevante Information, da die Multiplikation der Likelihoodfunktion mit einer Konstanten das Ergebnis der bayesianischen Inferenzmethodik nicht verändert.

halb spricht man von Data-Translation), weshalb das Indifferenzprinzip dann auf $\psi(\mu)$ angewendet werden sollte. Falls ψ die Identitätsfunktion ist, ergibt sich die klassische Indifferenz, ansonsten wird die Form von $P(\mu)$ durch eine Variablentransformation festgelegt. Dies ist aber nicht die einzige übliche Verfahrensweise, denn es gibt noch eine weitere Möglichkeit mit dem Problem der Skalenabhängigkeit umzugehen, die von Jeffreys vorgeschlagen wurde. Er greift auf das von Fisher definierte Konzept der Information zurück, welches die Information einer Likelihoodfunktion als $I(\mu|x) = -\int P(x)[(\partial/\partial\mu)^2 log(l(\mu|x))]dx$ definiert. Durch eine Variablentransformation $\psi = \psi(\mu)$ erhielte man $I(\psi|x) = I(\mu|x)(d\mu/d\psi)^2$. Falls man die Priorwahrscheinlichkeitsverteilung $P(\mu) \propto \sqrt{I(\mu|x)}$ wählt, so gilt dann $P(\psi) \propto \sqrt{I(\psi|x)}$ für die transformierte Priorverteilung, was bedeutet, dass die spezielle Skalierung keinen Einfluss hat. Noch ein anderer Ansatz, einen geeigneten Referenzprior zu finden, stammt von Bernardo [13], der sich auf ein von Lindley [144] etabliertes Informationskonzept stützt. Dieser ist zwar nicht invariant unter Transformationen der Parameter, aber unter anderem besser für Problemstellungen mit Störvariablen geeignet (etwa wenn man sich bei einer Normalverteilung, welche ja bekanntlich von zwei Parametern abhängt, nur für einen interessiert). Letzterer definiert die (erwartete) Information die eine Beobachtung herbeiführt als $I = \int P(x) \int P(\mu|x) log(P(\mu|x)/P(\mu)) d\mu dx$. Die Idee ist nun, dass die Priorwahrscheinlichkeitsverteilung gewählt werden sollte, welche die insgesamt zu erlangende Information maximiert, denn dann war man ja bezüglich dieses Informationskonzeptes unwissend. Die „insgesamt zu erlangende Information" wird idealisierend mit Hilfe einer Konvergenz der Informationsmenge für eine beliebig anwachsende Zahl an Beobachtungen dargestellt.

Andererseits kann man sich fragen, wie bestehendes Wissen geeignet zu repräsentieren ist. Verständlicherweise liegt der Wunsch nahe, dass die Form der Priorwahrscheinlichkeitsverteilung durch die Likelihoodfunktion trotz Adjustierung von Parametern nicht verändert wird, weil damit dann eine gewisse Konsistenz zwischen der bestehenden Vermutungen und dem Erkenntnisgewinn besteht. Zudem erlaubt dies einen einheitlichen und vereinfachten rechnerischen Umgang, welcher gerade für die praktische Durchführung nicht zu unterschätzen ist. Dies führt auf das Konzept der „konjugierten Familien": Wenn man sich auf eine bestimmte Likelihoodfunktion festlegt, ergeben Verteilungen aus der dafür spezifischen konjugierten Familie bei Verwendung als Priorwahrscheinlichkeitsverteilungen wieder eine Verteilung aus dieser Familie für die Posteriorwahrscheinlichkeitsverteilung, wobei lediglich die Parameter modifiziert werden[56]. Damit bleibt nun im Gegensatz zu den Improper Priors die Form von $P(\mu)$ statt derjenigen der Likelihoodfunktion erhalten. Beispielsweise bilden für die Schätzung des Erwartungswertes μ der Normalverteilung mit bekannter Varianz σ^2 aus mehreren Beobachtungen x_i die Normalverteilungen eine konjugierte Familie[57].

[56] Demnach resultieren Konvexkombinationen von Verteilungen einer konjugierten Familie wiederum in Konvexkombinationen aus Elementen der gleichen konjugierten Familie.

[57] Zu beachten ist, dass sich nicht nur der Erwartungswert bei dieser Konjugation ändert, sondern auch die Varianz, obwohl sie gar nicht im Fokus steht.

6.2.2.2 Vergleich mit der Klassischen Statistik

Es ist festzustellen, dass die bayesianische Vorgehensweise durchaus in der Lage ist, Resultate der Klassischen Statistik zu reproduzieren, wenn man die sogenannte „Methode von Lindley"[58] verwendet, welche die Bayeskonditionalisierung mit Signifikanzgrenzen verbindet: Wenn man etwa zwischen den Hypothesen $\mu = c$ und $\mu \neq c$ entscheiden möchte, solle man eine Priorwahrscheinlichkeitsverteilung anwenden, welche vollständig uniform bezüglich μ ist. Maßgeblich für die Bewertung der Nullhypothese ist dann ein möglichst kleiner symmetrischer Bereich der Posteriorverteilung mit Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$[59]. Die Nullhypothese wird dann abgelehnt, falls sich c außerhalb dieser Region befindet. Wenn das Problem etwa die Normalverteilung mit bekannter Varianz betrifft, kommen die bayesianische und die klassische Vorgehensweise trotz unterschiedlicher Interpretation zu identischen Resultaten. Bemerkenswerterweise kann diese Emulation im Wesentlichen auch die Varianzanalyse erfassen, falls man eine data-translated Priorwahrscheinlichkeitsverteilung für die Likelihoodfunktion wählt, welche sich aus dem Allgemeinen Linearen Modell ergibt[60]. Aber natürlich bleibt festzuhalten, dass sich im Fall einer Ablehnung von Lindleys Methode beide Vorgehensweise nicht zuletzt durch eine Wahl nichttrivialer Priorwahrscheinlichkeiten deutlich unterscheiden können. Zudem wird ein subtiler Unterschied zwischen ihnen durch das nach ihm benannte Paradox beleuchtet.

Das sogenannte „Lindley Paradox" stellt dar, wie die Resultate von Klassischen und Bayesianischen Statistikmethoden empfindlich differieren können. Die Problematik wurde erstmals von Jeffreys in seinem Werk „Theory of Probability" [117] bemerkt, jedoch bezeichnete er es nicht als Paradox, was erst später durch Lindley [145] geschah. Deshalb wird es heute in der Literatur üblicherweise als Lindley Paradox bezeichnet, obwohl man auch vereinzelt auf die Benennung „Jeffreys Paradox" stößt.

Man möchte bezüglich einer Zufallsvariablen X, die mit bekannter Varianz σ^2 normalverteilt ist, mittels einer Beobachtung die Nullhypothese, welche einen bestimmten Erwartungswert $\mu = c$ postuliert, beurteilen[61]. Die Alternativhypothese behauptet $\mu \neq c$, wobei wir annehmen, dass der Parameter sich nur in einem kontinuierlichen begrenzten Bereich I der Länge l befinden kann, der c umgibt. Hat man einen Wert x durch Messung erhalten, der um ein Vielfaches der Varianz von c abweicht, so wird man nach der klassischen Vorgehensweise die Nullhypothese einfach verwerfen, da die Restfläche der Normalverteilung zu klein ist. Dies scheint im Einklang mit einer intuitiven Erfassung des Problems zu sein: Eine stark abweichende Beobachtung unterstützt nicht die Hypothese.

Bei der bayesianischen Variante der Statistik muss ja aber vorher noch die Priorwahrscheinlichkeitsverteilung bestimmt werden. Um möglichst ähnliche Ergebnisse

[58] Sie wurde erstmals von Lindley in [146] vorgeschlagen.

[59] Man spricht hier von einer „high density region".

[60] Es wird ausgenutzt, dass sich die Varianzanalyse formal als ein Spezialfall des Allgemeinen Linearen Modells beschreiben lässt.

[61] Wir halten uns bei der Darstellung an [198].

wie der klassische Ansatz zu liefern, wähle man einen noninformativen Prior. Es bietet sich an H_0 mit $1/2$ zu versehen und den Rest der Wahrscheinlichkeit uniform über I zu verteilen. Die Berechnung der Posteriorwahrscheinlichkeiten ergibt dann

$$p_0 = \int_{H_0} P(\mu|x)d\mu \propto 1/2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2\right) =: b/2$$

beziehungsweise

$$p_1 = \int_{H_1} P(\mu|x)d\mu \propto \int_{H_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \frac{1}{2l} d\mu.$$

Wenn das Intervall hinreichend groß war, kann man ohne nennenswerte Verluste p_1 mittels $1/(2l)$ annähern[62]. Der Bayesfaktor, der die Änderung der Posteriorwahrscheinlichkeiten bezüglich der Priorwahrscheinlichkeiten beschreibt, ergibt sich damit als lb.
Das Ergebnis ist nun insofern verwunderlich, als dass man genau zu der entgegengesetzten Schlussfolgerung kommt, solange das Intervall I nur groß genug war. Die Tatsache, dass die Wahrscheinlichkeit von H_1 diffus über eine große Menge von alternativen Parameterwerten verteilt ist, wird, obwohl die Beobachtung mit ihr konsistent ist, als Grund *gegen* sie interpretiert, da bei der Nullhypothese anscheinend ein besseres Situationsverständnis vorliegt. Eigentlich hätte man anfänglich erwarten können, dass man der bei Kodierung von Ignoranz in etwa das klassische Vorgehen reproduzieren kann, aber wie wir gesehen haben, liegt eine systematische Bevorzugung bestimmter Hypothesenarten vor.

Im Gegensatz zur Klassischen Statistik wird nicht nur eine Entscheidung bezüglich zweier Hypothesen herbeigeführt, sondern gleich eine ganze Verteilung für den Parameter, welche weiter ausgewertet werden kann. Zusätzlich kann Vorwissen natürlich integriert werden, was man jeweils als Vorteil auslegen kann. Hierzu ist jedoch zu bemerken, dass die Bewertung der Hypothesen an sich schon die relevanten Informationen präzisieren und die konkrete Einbindung von Hintergrundwissen keinen kanonischen Prinzipien unterliegt. Es wäre grundsätzlich denkbar, alle zur Verfügung stehenden Informationen mit Hilfe eines größer angelegten klassischen Tests zu beurteilen, jedoch müssen hierfür, wie bereits bemerkt wurde, gewisse strukturelle Voraussetzungen geschaffen sein. Die Verwendung einer Priorwahrscheinlichkeitsverteilung erlaubt es, die Vorkenntnisse unkompliziert einzusetzen[63]. Wenn die Klassische Statistik in gewisser Hinsicht „starr" ist, so erlaubt die bayesianische Variante eine größere Flexibilität.
Der ursprüngliche Vorwurf gegenüber der Standardmethodik bestand ja darin, dass „Beobachtungen" eine Rolle spielen, die gar nicht aufgetreten sind. Darum geht es

[62]Hierbei haben wir die Normalisierung der Normalverteilung verwendet.
[63]Während die Klassische Statistik aufgrund eines bemühten objektiven Vorgehens typischerweise mit mehreren Annahmen belastet ist, werden diese im Bayesianismus aufgrund der Einfachheit des Verfahrens umgangen. Dafür muss man bei der Priorverteilung enormes Fingerspitzengefühl walten lassen.

aber gar nicht. Intuitiv ist klar, dass man Beobachtungen danach einstufen möchte, wie „weit" sie von den vermuteten Parametern entfernt sind, und ein natürliches Maß stellen hierfür Restflächen der Wahrscheinlichkeitsverteilung dar. Und das muss deutlich erwähnt werden: Wenn man auf diese Methodik zurückgreift, will man keinesfalls nichtexistente Beobachtungen bemühen, die sich ebenfalls in dem Ablehnungsbereich befinden, sondern deren Wahrscheinlichkeiten sind nur Mittel zum Zweck ein geeignetes Distanzmaß zu etablieren.
Wie oben dargestellt, werden mehrere Alternativen an Referenz-Prioren vorgegeben, aber deren Auswahl ist keinen kanonischen Prinzipien unterworfen; es ist durchaus vertretbar, als Prior für die Normalverteilung, bei der beide Parameter interessieren, Jeffreys' Prior[64] oder den Data-translated Prior[65] zu verwenden; nur führen diese dann unter anderem zu unterschiedlichen Resultaten.
Oft wird als Verteidigung der Bayesianischen Statistik vorgebracht, dass bei zunehmendem Datenmaterial die Priorwahrscheinlichkeitsverteilung im Gegensatz zu den Daten nur einmal Eingang findet, so dass im Endeffekt ungefähr ein klassisches Vorgehen stattfindet. Das mag wohl genau in dieser Situation stimmen, aber kumuliertes Datenmaterial kann wiederum durch eine subjektiv gewählte Priorwahrscheinlichkeitsverteilung erfasst werden, so dass der objektive Einfluss der Daten im Sinne der Regel von Bayes auf eine einmalige Anwendung reduziert wird. Es ist in gewisser Weise willkürlich zu wählen, wo man diesen Anfangspunkt setzt.

[64] $p(\mu, \sigma) \propto \sigma^{-3}$
[65] $p(\mu, \sigma) \propto \sigma^{-2}$

6.2.3 Konklusion

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass statistisches Vorgehen den Anwender zu vielen Entscheidungen nötigt, die keinen kanonischen Prinzipien unterworfen sind, und damit alles andere als einen ultimativen Prüfstein für Erkenntnisgewinnung darstellt[66]. Zunächst einmal gibt es den Widerstreit zwischen Klassischer und Bayesianischer Statistik. Aber selbst wenn man hierbei zu einer endgültigen Entscheidung über die korrekte Methodik käme, liegt jeweils eine Koexistenz verschiedener Priorverteilungen beziehungsweise statistischer Verfahren vor und das Ergebnis statistischen Vorgehens hängt sehr wohl von der Wahl des speziellen Priors oder Verfahrens ab. Alle in Frage kommenden Alternativen können ihrerseits gut begründet sein, doch sie sind nicht in jedem Fall äquivalent bezüglich ihrer Konsequenzen und können unter anderem zu konträren Schlussfolgerungen führen. Zudem werden besonders in der Klassischen Statistik viele Näherungen eingesetzt, welche zu einer Anhäufung von Ungenauigkeiten führen können. Und bevor Statistik überhaupt beginnen kann, ist eine Modellierung in mögliche Welten notwendig. Dass dieser Punkt, welcher als selbstverständlich abgetan wird, da er in vielen Fällen mit Minimalaufwand sinnvoll zu realisieren ist, nicht unterschätzt werden darf, zeigt das „Problem der drei Gefangenen"[67], welches schon bei einer der einfachsten Anwendungen von Statistik auftritt.

Drei Verbrecher befinden sich in einem unzivilisierten Land im Gefängnis und wissen nur, dass zwei von ihnen hingerichtet werden und einer überlebt. Prima facie würde man mit Hilfe des klassischen Indifferenzprinzips die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmter Gefangener der Exekution entgeht, auf $1/3$ festsetzen. Einer der Gefangenen, dem diese Wahrscheinlichkeit zu gering ist und den die Not erfinderisch gemacht hat, hat sich eine Methode ersonnen, um seine Überlebenschancen zu erhöhen. Er sagt zu dem Wärter, er solle ein wenig Mitleid für seine missliche Situation haben und ihm doch den Namen eines der anderen Insassen, welcher hingerichtet werden soll, verraten. Der Wärter hat tatsächlich Mitleid und nennt ehrlich den Namen eines anderen Insassen, der nicht überleben wird; daraufhin verkündet der Gefangene triumphal, dass der Wächter gerade seine Chance zu überleben bei erneuter Anwendung des Indifferenzprinzips auf $1/2$ erhöht habe, da es für den zweiten Unglücklichen nur noch zwei Möglichkeiten gibt.
Zunächst denkt man sich, dass diese Information dem Gefangenen gar nicht geholfen haben kann, da er ja diese Überlegung für sich selbst hätte durchführen können und unabhängig von der Antwort des Wächters zum gleichen Ergebnis gekommen wäre. Dies ist jedoch nicht ganz richtig, da noch gar nicht berücksichtigt wurde, ob der Wächter eine gewisse Strategie verfolgte, denn abhängig von den zwei tatsächlich Verurteilten hat er möglicherweise eine Wahl bei seiner Antwort. Versuchen wir nun

[66]Die einzige praktische Lösung wäre ein Konventionalismus, aber dann müsste man sich fragen, wieso man nicht gerade eine andere Konvention gewählt hat; damit wird die Relativität des Vorgehens offengelegt.
[67]Die hier präsentierte Lösung wurde aus Halpern [95] entnommen.

dies unter Beibehaltung des Indifferenzprinzips an sich einzubeziehen. Dann stellen wir fest, dass sich eine feinere Unterteilung der möglichen Welten mit Hilfe von Paaren anbietet, bei denen der erste Eintrag den Überlebenden und der zweite Eintrag die Antwort des Wärters bezeichnet. Zur vereinfachten formalisierten Darstellung seien nun die Gefangenen mit a, b und c benannt[68], woraus sich dann folgende Partition ergibt:

$$\{(a,b),(a,c),(b,c),(c,b)\}.$$

Nun ist natürlich zu fragen, wie sich die Wahrscheinlichkeiten darauf verteilen. Laut dem Indifferenzprinzip haben (b,c) und (c,b) jeweils die Wahrscheinlichkeit $1/3$. Aber was ist mit (a,b) und (a,c)? Auf jeden Fall muss $P(\{(a,b),(a,c)\}) = 1/3$ gelten. Um festzustellen, wie sich das auf die Elemente verteilt, nehmen wir erst einmal an, dass der Wärter keine Präferenz bei seiner Antwort zeigt, was uns erneut das Indifferenzprinzip bei der Subpartition heranziehen lässt und $P(\{(a,b)\}) = P(\{(a,c)\}) = 1/6$ liefert. Bei dieser feineren Modellierung ist nun der Einfluss der Antworten des Wärters auf das Überleben von a mittels konditionierten Wahrscheinlichkeiten zu deuten, was uns etwa bei der Antwort b auf $P(\{(a,b),(a,c)\}|\{(a,b),(c,b)\})$ führt und dies ist gleich $P(\{(a,b)\})/P(\{(a,b),(c,b)\}) = (1/6)/(1/6+1/3) = 1/3$. Voilá, genau was man intuitiv erwartete: Die Antwort stellt keine relevante Information dar. Antwort c ergibt dann analog das gleiche Ergebnis.
Was ist aber, wenn der Wärter eine bestimmte Antwort bevorzugt? Wenn wir die Neigung mit b zu antworten als α bezeichnen, so gilt nun $P(\{(a,b)\}) = \alpha/3 = 1/3 - P(\{(a,c)\})$. Die Wiederholung der Rechnung ergibt jetzt

$$P(\{(a,b),(a,c)\}|\{(a,b),(c,b)\}) = (\alpha/3)/(\alpha/3+1/3) = \alpha/(\alpha+1).$$

Im Extremfall, dass der Wärter bei der Begnadigung von a nie b sagt ($\alpha = 0$), ist bei der Antwort b die Überlebenswahrscheinlichkeit null. Dies bedeutet aber bei der Antwort c, dass die Wahrscheinlichkeit tatsächlich auf $1/2$ gestiegen ist[69], da die Strategie des Wärters Informationen kodiert[70].
Wir haben also durch eine sorgfältigere Modellierung der möglichen Welten festgestellt, dass neben $1/3$ auch überraschenderweise $1/2$ als Überlebenswahrscheinlichkeit vernünftig ist, dies aber davon abhängt, ob der Wärter eine bestimmte Antwort bevorzugt. Nur wenn er seinerseits das Indifferenzprinzip befolgt, ist die anfänglich durch Intuition gegebene Antwort korrekt. Da man aber schwerlich in Erfahrung bringen kann, welcher Rationalität sich der Wärter unterordnet, bleibt einem nichts Besseres übrig als vom Indifferenzprinzip auszugehen, was dann heißt, dass man einer Antwort, egal welche sie auch sein mag, vernünftigerweise keine Bedeutung bezüglich der Verbesserung der Überlebenswahrscheinlichkeit zuweisen kann. In jedem Fall muss man sich aber dieser Subtilität bewusst sein.

[68] Gefangener a stellt die Frage.

[69] Die analoge Rechnung für Antwort c lautet:
$P(\{(a,b),(a,c)\}|\{(a,c),(b,c)\}) = (1-\alpha)/(2-\alpha)$.

[70] Genau die umgekehrte Schlussfolgerung gilt dann natürlich bei $\alpha = 1$.

Ein äußerst delikater Punkt ist noch das sogenannte „Likelihood-Prinzip", welches intuitiv erfasst besagt, dass nur die tatsächliche Beobachtung bei einem Experiment zählen sollte und nicht andere mögliche Manifestationen, die sich hätten ergeben können. Formal präzisiert behauptet es, dass sich identische Folgerungen ergeben müssen, wenn die Likelihoods einer Beobachtung zueinander proportional sind; aus dieser Formulierung zieht das Prinzip auch seinen Namen. Birnbaum [17] zeigte unter Verwendung einer geeigneten Beschreibung von Informationen, die durch ein Experiment bereitgestellt werden, dass dieses Prinzip äquivalent zur der Konjunktion zweier anderer Prinzipien ist, nämlich dem „Konditionalitäts-" und dem „Suffizienzprinzip". Während Ersteres eine Aussage über die Beweiskraft kombinierter Experimente macht, sichert Letzteres zu, dass von einer Beobachtung schon der Wert einer daraus gebildeten suffizienten Statistik ausreichend ist und nicht die volle Information der Beobachtung benötigt wird[71]. An sich mag das Likelihood-Prinzip geradezu harmlos erscheinen, doch es hat nicht nur für die klassische, sondern auch für die Bayesianische Statistik dramatische Konsequenzen. Diese sind darin begründet, dass sich unmittelbar aus ihm ergibt, dass die durch ein Experiment bereitgestellte Information nicht von der Stoppregel abhängt. Beispielweise hätte dann in einem dichotomen Szenario die Beobachtung von neunfacher Abwesenheit und schließlicher einmaliger Instantiierung bei den beiden Stoppregeln „anfänglich fixierte Zahl zehn" und „Durchführung bis zum Erfolg" die gleiche Aussagekraft. Einerseits könnte man ja argumentieren, dass sich durch die Unterschiedlichkeit der Regeln auch unterschiedliche Schlussfolgerungen ergeben sollten. Dies wird besonders deutlich bei einer Anwendung der Klassischen Statistik mit der Bernoulliverteilung, nach welcher bei zweiter Regel die Erfolgswahrscheinlichkeit höher bewertet wird als sie dem Modell eigentlich zugrunde liegt[72]. Andererseits erscheint es plausibel, dass nur die Beobachtung zählen sollte und sie nicht davon beeinflusst wird, was noch hätte passieren können. Da das Prinzip ja Likelihood-Prinzip heißt, mag man vermuten, dass die Bayesianische Statistik dieses automatisch erfüllt. Dem ist aber nur so für die Wahl von bestimmten Priorwahrscheinlichkeiten. Informationen über die Stoppregel gehen etwa bei Jeffreys' Prior ein, was diesen als ungeeignet klassifiziert. Demnach ist das Likelihood-Prinzip ein Problem, das unabhängig vor dem Widerstreit von Klassischer und Bayesianischer Statistik untersucht werden kann, allerdings dürfen Bayesianisten behaupten, dass sie wenigstens im Einklang mit ihm arbeiten können. Zu seinen Fürsprechern zählen unter anderem Barnard [9], Savage [191] und Edwards [61]. Eine gewissermaßen neutrale Beurteilung des Sachverhalts findet sich bei Hacking in „The Logic of Statistical Inference" [88]: „But at present I do not think it is known whether the likelihood principle is true or false.". Dazu ist zu bemerken, dass der Status des Likelihood-Prinzips auch heute nicht zweifelsfrei geklärt ist.

Statistik stellt nur einen formalen Rahmen für eine bestimmte Art induktiven Vorgehens dar und erschöpft demnach nicht alle Quellen zur Erkenntnisgewinnung.

[71]Wie wir bereits erwähnten, wird dieses Prinzip von der Bayesianischen Statistik erfüllt.

[72]Das ist in dem Sinne gemeint, dass der Erwartungswert der Erfolge in der Beobachtung immer größer als die Erfolgswahrscheinlichkeit des Modells ist.

Führende Statistiker wie Lindley [147] weisen explizit darauf hin: „...it is only the manipulation of uncertainty that interests us. We are not concerned with the matter that is uncertain. Thus we do not study the mechanism of rain; only whether it will rain.”. Demnach hat Statistik das Ziel, Daten unabhängig von deren Hintergrund auszuwerten. Es ist schon richtig, dass man von einer formalisierten Theorie genau das erwartet, doch verdeutlicht das gewählte Beispiel geradezu, dass für eine ausgereifte Induktion noch weit mehr Kenntnisse einzubeziehen sind. In dem Wissen, dass außer statistischen Daten noch viel mehr Zusammenhänge und Sachverhalte eine Rolle spielen, ist es schlicht unvernünftig, sich auf die reine Datenmanipulation zu beschränken. Für die Wettervorhersage ist es beispielsweise sehr hilfreich darüber Bescheid zu wissen, wie Regen zustande kommt und wie das Heranziehen einer Kaltluftfront zu deuten ist, anstatt sich lediglich auf irgendwelche relativen Häufigkeiten der letzten zwei Monate zu verlassen. Natürlich muss man selbst bei einem relativ umfassendem Wissensstand irgendwann auf wahrscheinlichkeitstheoretische Konzepte zurückgreifen, weil man den Punkt erreicht, an welchem man nichts mehr aussagen kann. Man darf aber nicht dem Irrglauben verfallen, dass Statistik gewissermaßen den Stein der Weisen darstellt, auch wenn sie manchmal zu überraschend präzisen Voraussagen fähig ist. In jedem Fall erübrigt sich eine kritische Beurteilung und Ergänzung der abgeleiteten Ergebnisse keineswegs, sondern ist essentiell, damit ein induktiver Schluss nicht nur partikuläre Kenntnisse widerspiegelt.
Abschließend noch eine kurze Bemerkung zur „Paradoxie des Unwahrscheinlichen”. Immer wenn ein als unwahrscheinlich eingestuftes Ereignis eintritt, dann mag man versucht sein zu glauben, dass Wahrscheinlichkeiten vollkommen wertlos sind und man besser immer auf die gegenteilige Voraussage vertrauen solle. Dies ist aber mehr als voreilig, da die Theorie unwahrscheinliche Ereignisse keinesfalls ausschließt, sondern geradezu voraussagt. Dem pflichtet auch Stegmüller [221] bei, indem er behauptet, dass Wahrscheinlichkeiten immer nur Vernunftgründe sind, aber niemals vollständige Erklärungen liefern. In dem Sinne, dass Voraussagen immer den aktuellen Wissenstand einbeziehen sollten, muss nach einem vermehrten Auftreten von etwas Unerwartetem die Wahrscheinlichkeit korrigiert werden. Stegmüller bezeichnet eine derartige Lösung als pragmatisch, aber nur eine solche ist sinnvoll, wenn man keine weitreichenden Kenntnisse hat, die eine Wahrscheinlichkeit als unumstößlich ausweisen[73].

[73]Etwa wenn man bei einem Würfel über dessen annähernd vollkommene Homogenität informiert ist.

Kapitel 7

Schlusswort

Somit lässt sich abschließend feststellen:

Der Bayesianismus nimmt den Menschen als epistemisches Subjekt ernst.

Wahrscheinlichkeiten mit ihren formalen Eigenschaften erweisen sich gerade wegen ihrer Natürlichkeit als besonders tragfähig, da sie verschiedene gehaltvolle Interpretationen zulassen; Alternativkonstrukte zum Umgang mit Unwissen beleuchten dagegen keinen fundamental neuen epistemischen Aspekt und dienen vorwiegend einer effizienteren maschinellen Implementierung.

Insofern es sich bei der Wahrscheinlichkeitstheorie um eine mathematische Theorie handelt, muss für ihre sinnvolle Anwendung das Reinheitsprinzip beachtet werden.

Statistik stellt ausgereifte Abläufe bereit, um induktive Schlüsse zu vollziehen, allerdings birgt sie eine große Flexibilität, die sich nicht immer kanonischen Prinzipien unterwirft.

Trotz gegenteiliger Behauptungen stellt die Bayesianische Entscheidungstheorie im Vergleich zur Spieltheorie eine prinzipiell unterschiedliche Methodik dar, um Handlungen auszuzeichnen.

Auch wenn man den Zustand der Unwissenheit als suboptimal empfinden mag, so ist er doch eine notwendige Voraussetzung für die Freiheit des Menschen.

Literaturverzeichnis

[1] Achinstein, P. (1993), „Explanation and 'Old Evidence' ", Philosophia 51(1), 125-137

[2] Anscombe, F. J. und Aumann, R. J. (1963), „A Definition of Subjective Probability", Annals of Mathematical Statistics 34, 199-205

[3] Armendt, B. (1986), „A foundation for causal decision theory", Topoi 5, 3-19

[4] Armendt, B. (1993), „Dutch Books, Additivity and Utility Theory", Philosophical Topics 21(1), 1-20

[5] Arnauld, A. (1662), „Logic, or, The Art of Thinking"(The Port Royal Logic), Übersetzung von Dickoff, J. und James, P. (1964), Indianapolis: Bobbs-Merrill

[6] Bacchus, F., Kyburg, H. E. und Thalos, M. (1990), „Against Conditionalization", Synthese 85, 475-506

[7] Bacon, F. (1620), „Novum Organum", London: Routledge

[8] Baillie, P. (1973), „Confirmation and the Dutch Book Argument", British Journal for the Philosophy of Science 24, 393-397

[9] Barnard, G. A., Jenkins G. M. und Winston, C. B. (1962), „Likelihood Inference and Time Series", Journal of the Royal Statistical Society A 125(3), 321-372

[10] Bartha, P. und Hitchcock, C. (1999), „No one knows the date or the hour: an unorthodox application of Rev. Bayes's Theorem", Philosophy of Science(Proceedings) 66, 329-353

[11] Bayes, T. (1764), „An Essay Toward Solving a Problem in the Doctrine of Chances", Philosophical Transactions of the Royal Society of London 53, 370-418

[12] Belnap, N. D., Perloff, M. und Xu, M. (2001), „Facing the Future: agents and choices in our indeterministic world", Oxford: Oxford University Press

[13] Bernardo, J. M. (1979), „Expected information as expected utility", The Annals of Statistics 7, 686-690

[14] Bernoulli, J. (1713), „Ars Conjectandi", Basel: Thurneysen

[15] Bertrand, J. L. F. (1887), „Calcul des probabilités", Paris: Gauthier-Villars

[16] Bigelow, J. , Collins, J. et al. (1993), „The big bad bug: what are the Humean's chances", British Journal for the Philosophy of Science 44, 443-463

[17] Birnbaum, A. (1962), „On the foundations of statistical inference", Journal of the American Statistical Association 57(298), 269-326

[18] Black, R. (1998), „Chance, Credence, and the Principal Principle", British Journal for the Philosophy of Science 49, 371-385

[19] Boole, G. (1854), „An Investigation into the Laws of Thought on which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities", London: Macmillan

[20] Bortz, J. (2005), „Statistik für Human- und Sozialwissenschaftler", 6. Auflage, Heidelberg: Springer

[21] Bostrom, N. (1999), „A Subjectivist Theory of Objective Chance", British Society for the Philosophy of Science Conference on July 8-9 in Nottingham (U.K.)

[22] Bostrom, N. (2001), „The Doomsday Argument, Adam and Eve, UN^{++} and Quantum Joe", Synthese 127, 359-387

[23] Bostrom, N. (2002), „Anthropic Bias: Observation Selection Effects", London: Routledge

[24] Bostrom, N. (2003), „The Doomsday Argument and the Self-indication-assumption: Reply to Olum", The Philosophical Quarterly 53, 83-91

[25] Bostrom, N. (2007), „I want to be a posthuman when I grow up", in: „Medical Enhancement and Posthumanity", Springer

[26] Box, G. E. P. und Tiao, G. C. (1992), „Bayesian Inference in Statistical Analysis", Wiley Classics Library

[27] Brafman, R. I. und Tennenholtz, M. (2000), „An Axiomatic Treatment of Three Qualitative Decision Criteria", Journal of the Association of Computing Machinery 47, 452-482

[28] Braithwaite, R. B. (1957), „On Unknown Probabilities", in: „Observation and Interpretation", Körner, S. (Hrsg.), London, 3 - 11

[29] Carnap, R. (1947), „Naming and Necessity", Chicago: University of Chicago Press

[30] Carnap, R. (1950), „The Logical Foundations of Probability", Chicago: University of Chicago Press

[31] Carnap, R. (1952), „The Continuum of Inductive Methods", Chicago: University of Chicago Press

[32] Carnap, R. und Stegmüller, W. (1959), „Induktive Logik und Wahrscheinlichkeit", Wien: Springer

[33] Carter, B. (1983), „The Anthropic Principle and its Implications for Biological Evolution", Philosophical Transactions of the Royal Society of London 310, 347-363

[34] Cartwright, N. (1979), „Causal laws and effective strategies", Nous 13, 419-437

[35] Chihara, C. und Kennedy, R. (1979), „The Dutch Book Argument: Its Logical Flaws, its Subjective Sources", Philosophical Studies 36, 19-33

[36] Christensen, D. (1991), „Clever Bookies and Coherent Beliefs", The Philosophical Review C No.2, 229-247

[37] Coffman, E. J. (2007), „Thinking about luck", Synthese 158, 385-398

[38] Cohen, L. J. (1980), „Some Historical Remarks on the Baconian Conception of Probability", Journal of the History of Ideas 41, 219-231

[39] Cohen, S. (2000), „Contextualism and skepticism", Philosophical Issues 10, 94-107

[40] Condorcet, Jean-Antoine-Nicolas (1785), „Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des decision rendues à la pluralité des voix", Paris

[41] David, F. N. (1962), „Games, Gods and Gambling", Griffin Press

[42] Davidson, McKinsey und Suppes (1955), „Outlines of a formal theory of value, Part 1", Philosphy of Science 22, 140-160

[43] Davidson, D., Siegel, S. und Suppes, P. (1977), „Decision making - An experimental approach", Westport(Connecticut): Greenwood Press

[44] DeFinetti, B. (1937), „La Prévision: Ses Lois Logiques, Ses Sources Subjectives", Annales de l'Institut Henri Poincaré 7, 1-68

[45] DeFinetti, B., (1989) „Probabilism", Erkenntnis 31, 165 - 223

[46] Dempster, A. P. (1967), „Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping", Annals of Mathematical Statistics 38, 325-339

[47] Dempster, A. P. (1990) , „Construction and Local Computation Aspects of Network Belief Functions", in: „Influence Diagrams, Belief Nets and Decision Analysis", Smith, J. Q. und Oliver, R. M.(Hrsg.), 121-141

[48] DeRose, K. (1995), „Solving the skeptical problem", Philosophical Review 104, 1-52

[49] Descartes, R. (1960), „Von der Methode des richtigen Vernunftgebrauchs und der wissenschaftlichen Forschung”, Hamburg: Meiner Verlag

[50] Dieks, D. (1992), „Doomsday - Or: the Danger of Statistics”, Philosophical Quarterly 42(166), 78-84

[51] Dieks, D. (2007), „Doom and Beauty: Reasoning about the Future”, Synthese 156, 427-439

[52] Dretske, F. (1970), „Epistemic Operators”, The Journal of Philosophy 67, 1007-1023

[53] Dubois, D. und Prade, H. (1982), „On several representations of an uncertain body of evidence”, in: „Fuzzy Information and Decision Processes”, Gupta, M. N. und Sanchez, E. (Hrsg.), Amsterdam: North-Holland, 167-181

[54] Dubois, D. und Prade, H. (1995), „Possibility Theory as Basis for Qualitative Decision Theory”, in: Proceedings of the 14th International Joint Conference on Artificial Intelligence in Montreal (IJCAI'95), 1925-1930

[55] Dubois, D. und Prade, H. (1998), „Possibility theory: Quantitative and Qualitative Aspects”, in: „Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems, Vol. 1”, Gabbay, D. M. und Smets, P. (Hrsg.), Dordrecht: Kluwer, 169-226

[56] Eagle, A. (2004), „Twenty-One Arguments Against Propensity Analyses Of Probability”, Erkenntnis 60, 371-416

[57] Earman, J. (1992), „Bayes or Bust? A Critical Examination of Bayesian Confirmation Theory”, Cambridge: MIT Press

[58] Eells, E. (1982), „Rational decision and causality”, Cambridge: Cambridge University Press

[59] Eells, E. (1990), „Bayesian Problems of Old Evidence”, Minneapolis: University of Minnesota Press

[60] Edwards, W., Lindman, H., und Savage, L. J. (1963), „Bayesian Statistical Inference for Psychological Research”, Psychological Review LXX, 193-242

[61] Edwards, A. W. F. (1992), „Likelihood”, 2. Auflage, Baltimore: Johns Hopkins University Press

[62] Elga, A. (2000), „Self-locating Belief and the Sleeping Beauty problem”, Analysis 60(2), 143-147

[63] Eriksson, L. und Hajek, A. (2007), „What are degrees of belief?”, Studia Logica 86 (Special Issue Formal Epistemology 1), 183-213

[64] Fagin, R. und Halpern, J. Y. (1991), „Uncertainty, belief and probability”, Computational Intelligence 7(3), 160-173

[65] Fetzer, J. H. (1981), „Scientific Knowledge: Causation, Explanation, and Corroboration”, Boston Studies in the Philosophy of Science Vol. 69, Dordrecht: Reidel

[66] Fetzer, J. H. (1982), „Probabilistic Explanations”, PSA Vol.2 , 194-207

[67] Fetzer, J. H. (1988), „Probabilistic Metaphysics”, in: „Probability and Causality”, Dordrecht: Reidel, 109-132

[68] Fine, T. (1973), „Theories of Probability”, Academic Press

[69] Fisher, R. A. (1922), „On the Mathematical Foundations of Theoretical Statistics”, Phil. Trans. Roy. Soc. London Ser. A 222, 309-368

[70] Fisher, R. A. (1930), „Inverse Probability”, Proceedings Cambridge Philosophical Society 26, 528-535

[71] Fisher, R. A. (1935), „The design of experiments”, Macmillan Pub. Co.

[72] Gaifman, H. (1988), „A Theory of Higher Order Probabilities”, in: „Causation, Chance, and Credence”, Skyrms, B. und Harper, W. L. (Hrsg.), Dordrecht: Kluwer

[73] Garber, D. (1983), „Old Evidence and Logical Omniscience in Bayesian Confirmation Theory”, in: „Testing Scientific Theories”, Earman, J. (Hrsg.), Minneapolis, 99-131

[74] Gärdenfors, P. (1988), „Knowledge in Flux”, Cambridge: MIT Press

[75] Gettier, E. (1963), „Is justified true belief knowledge?”, Analysis 23, 121-123

[76] Giang, P. G. und Shenoy, P. P. (2000), „A Qualitative Linear Utility Theory for Spohn's Theory of Epistemic Beliefs”, in: „Uncertainty in Artificial Intelligence, Vol. 16”, Boutilier, C. und Goldszmidt, M. (Hrsg.), San Francisco: Morgan Kaufmann, 220-229

[77] Giang, P. G. und Shenoy, P. P. (2005), „Two Axiomatic Approaches to Decision Making Using Possibility Theory”, European Journal of Operational Research 162, 450-467

[78] Gibbard, A. und Harper, W. (1978), „Counterfactuals and two kinds of expected utility”, in: „Foundations and applications of decision theory”, Hooker, C. , Leach, J. und McClennen, E. (Hrsg.), Dordrecht: Reidel, 125-162

[79] Giere, R. N. (1973), „Objective Single-Case Probabilities and the Foundations of Statistics”, in: „Logic, Methodology and Philosophy of Science IV”, Suppes, P. et al. (Hrsg.), New York: North-Holland

[80] Giere, R. N. (1976), „A Laplacean Formal Semantics for Single Case Propensities", Journal of Philosophical Logic 5, 321-353

[81] Gilboa, I. (1987), „Expected Utility with Purely Subjective Non-Additive Probabilities", Journal of Mathematical Economics 16, 65-88

[82] Gilboa, I. (1994), „Can free choice be known?", in: „The Logic of Strategy", Bicchieri, C., Jeffrey, R. und Skyrms, B. (Hrsg.), Oxford University Press

[83] Gillies, D. (2000), „Varieties of Propensity", British Journal for the Philosophy of Science 51, 807-835

[84] Goldstein, M. (1983), „The Prevision of a Prevision", Journal of the American Statistical Association 78, 817-819

[85] Goodman, N. (1965), „Fact, Fiction and Forecast", 2. Auflage, New York: Bobbs Merrill,

[86] Gott, J. R. (1993), „Implications of the Copernican Principle for our Future Prospects", Nature 363, 315-319

[87] Greco, J. (2007), „Worries about Pritchard's safety", Synthese 158, 299-302

[88] Hacking, I. (1965), „The Logic of Statistical Inference", Cambridge: Cambridge University Press

[89] Hacking, I. (1975), „The Emergence of Probability", Cambridge: Cambridge University Press

[90] Hajek, A. (2003), „What conditional probability could not be", Synthese 137(3), 273-323

[91] Hajek, A. (2005), „Scotching Dutch Books?", Philosophical Perspectives 19 (issue on Epistemology), Hawthorne, J. (Hrsg.), 139-151

[92] Hajek, A. (2007), „The reference class problem is your problem too!", Synthese 156(3), 563-585

[93] Hajek, A. (2007), „Dutch Book Arguments", in: „The Oxford Handbook of Corporate Social Responsibility", Anand, P., Pattanaik, P. und Puppe, C. (Hrsg.)

[94] Hall, N. (1994), „Correcting the guide to objective chance", Mind 103(412), 505-517

[95] Halpern, J. Y. (2003), „Reasoning about Uncertainty", Cambridge: MIT Press

[96] Halpin, J. L. (1994), „Legitimizing Chance: The Best-System Approach to Probabilistic Laws in Physical Theory", Australasian Journal of Philosophy 72(3), 317-338

[97] Hawthorne, J. (2004), „Knowledge and lotteries", Oxford: Clarendon Press

[98] Hiller, A. und Neta, R. (2007), „Safety and epistemic luck", Synthese 158, 303-313

[99] Hintikka, J. (1972), „Unknown Probabilities, Bayesianism, and DeFinetti's Representation Theorem", in: Boston Studies in the Philosophy of Science, Bd. 8., 325 - 341

[100] Hitchcock, C. (2004), „The Beauty and the Bets", Synthese 139, 405-420

[101] Hobbes, T. (1997), „Leviathan", Flatman, R. E. und Johnston, D. (Hrsg.), New York: W. W. Norton and Company

[102] Hoefer, C. (1997), „On Lewis' objective chance: Humean supervenience debugged", Mind 106(422), 321-334

[103] Horn, A. und Tarski, A. (1948), „Measures in Boolean Algebras", Transactions of the AMS 64(1), 467-497

[104] Howson, C. (1991), „The 'Old Evidence' Problem", British Journal for the Philosophy of Science 42(4), 547-555

[105] Howson, C. (1995), „Theories of Probability", British Journal for the Philosophy of Science 46, 1-32

[106] Hume, D. (1977), „An enquiry concerning human understanding", Originalausgabe 1748, Indianapolis: Hackett Publishing

[107] Hume, D. (1978), „A Treatise of Human Nature", 2. Auflage, Selby-Bigge, L. A. (Hrsg.), Oxford: Clarendon Press

[108] Huygens, C. (1657), „Libellus de Ratiociniis in Ludo Aleae", Leiden

[109] Jackson, F. (2000), „From Metaphysics to Ethics: A Defence of Conceptual Analysis", Oxford: Oxford University Press

[110] Jackson, F. , Pargetter, R. und Prior, E. W., ,(1982), „Three Theses about Dispositions", American Philosophical Quarterly 19, 251-257

[111] Jaffray, J. Y. (1989), „Linear Utility Theory for Belief Functions", Operations Research Letters 8, 107-112

[112] Jaynes, E. T. (1968), „Prior Probabilities", Institute of Electrical and Electronic Engineers Transactions on Systems Science and Cybernetics SSC-4, 227-241

[113] Jeffrey, R. (1966), „The Logic of Decision", 2. Auflage (1983), Chicago: University of Chicago Press

[114] Jeffrey, R. (1971), „Probability Measures and Integrals", in: „Studies in Inductive Logic and Probability", Carnap, R. und Jeffrey, R. (Hrsg.), Berkeley - Los Angeles - London, 167-221

[115] Jeffrey, R. (1993), „Causality and the logic of decision", Philosophical Topics 21, 139-151

[116] Jeffrey, R. (2004), „Subjective Probability: The real thing", Cambridge: Cambridge University Press

[117] Jeffreys, H. (1939), „Theory of Probability", Neuabdruck (1998) in: Oxford Classics in the Physical Sciences series, Oxford University Press

[118] Joyce, J. M. (1999), „The foundations of causal decision theory", Cambridge: Cambridge University Press

[119] Joyce, J. M. (2007), „Are Newcomb problems really decisions?", Synthese 156, 537-562

[120] Kant, I. (1990), „Kritik der praktischen Vernunft", 10. Auflage, Hamburg: Meiner Verlag

[121] Katz, V. J. (1993), „A history of mathematics", Harper-Collins College Publishers

[122] Kavka, G. (1983), „The Toxin Puzzle", Analysis 43, 33-36

[123] Kemeny, J. (1955), „Fair Bets and Inductive Probabilities", Journal of Symbolic Logic, 20: 263-273

[124] Keynes, J. M. (1921), „A Treatise on Probability", Macmillan and Co

[125] Kolmogorov, A. N. (1933), „Foundations of the Theory of Probability", 2. Auflage (1956), New York: Chelsea

[126] Kopf, T. , Krtous, P. et al. (1994), „Too soon for doom gloom", Physics preprint archive gr-gc/9407002(v3, 4 July)

[127] Krauss, P. und Scott, D.(1966), „Assigning Probabilities to Logical Formulas", in: „Aspects of Inductive Logic", Hintikka, J. und Suppes, P. (Hrsg.), Amsterdam: North-Holland

[128] Kyburg, H. E. jr. (1961), „Probability and the Logic of Rational Belief", Middletown(Connecticut): Wesleyan University Press

[129] Kyburg, H. (1978), „Subjective Probability: Considerations, Reflections and Problems", Journal of Philosophical Logic 7, 157-180

[130] Kyburg, H. (1981), „Principle Investigation", Journal of Philosophy 78, 772-777

[131] Kyburg, H. (1988), „Powers", in: „Causation in Decision, Belief Change, and Statistics", Harper, W. L. und Skyrms, B. (Hrsg.), Kluwer Academic Publishers, 71-82

[132] Lao Tzu (1992), „Tao-te Ching", Übersetzung von J. J. L. Duyvendak, London: Murray

[133] Laplace, P. S. (1951), „A Philosophical Essay on Probabilities", (Originalausgabe 1814), New York: Dover

[134] Leblanc, H. und Roeper, P. (1999), „Probability theory and probability semantics", Toronto Studies in Philosophy

[135] Lee, P. M. (2004), „Bayesian Statistics", 3. Auflage, London: Arnold

[136] Leslie, J. (1989), „Risking the World's End", Bulletin of the Canadian Nuclear Society (May), 10-15

[137] Levi, I. (1997), „The Covenant of Reason: Rationality and the Commitments of Thought", Cambridge University Press

[138] Lewis, D. (1970), „Anselm and Actuality", Nous 4, 175-188

[139] Lewis, D. (1980), „A Subjectivist's Guide to Objective Chance", in: „Studies in Inductive Logic and Probability, Vol II.", Jeffrey, R. C. (Hrsg.), Berkeley and Los Angeles: University of California Press

[140] Lewis, D. (1981), „Causal decision theory", Australasian Journal of Philosophy 59, 5-30

[141] Lewis, D. (1996), „Elusive Knowledge", Australasian Journal of Philosophy 74, 549-567

[142] Lewis, D. (1997), „Finkish Dispositions", in: „Papers in Metaphysics and Epistemology", Lewis, D. (1999), Cambridge: Cambridge University Press, 133-151

[143] Libet, B. (2002), „Do we have free will?", in: „The Oxford handbook on free will", Kane, R. H. (Hrsg.), Oxford University Press, 551-564

[144] Lindley, D. (1956), „On a measure of information provided by an experiment", The Annals of Mathematical Statistics 27(4), 986-1005

[145] Lindley. D. (1957), „A Statistical Paradox", Biometrika 44

[146] Lindley, D. (1965), „Introduction to Probability and Statistics from a Bayesian Viewpoint", Cambridge: Cambridge University Press

[147] Lindley, D. (2000), „Philosophy of Statistics", Journal of the Royal Statistical Society: Series D (The Statistician), Vol. 49, No. 3

[148] Luce, R. D. und Raiffa, H. (1957), „Games and Decisions", New York: Wiley

[149] Lynch, S. M. (2007), „Introduction to applied Bayesian statistics and estimation for social scientists", New York: Springer

[150] Maher, P. (1993), „Betting on Theories”, Cambridge: Cambridge University Press

[151] Martin, C. B. (1994), „Dispositions and Conditionals”, Philosophical Studies 44, 1-8

[152] Mayo, D. (1996), „Error and the growth of experimental knowledge”, Chicago: Chicago University Press

[153] McClennen, E. F. (1990), „Rationality and Dynamic Choice”, Cambridge: Cambridge University Press

[154] Mellor, D. H. (1971), „The Matter of Chance”, Cambridge: Cambridge University Press

[155] Mellor, D. H. (1995), „The Facts of Causation”, New York: Routledge

[156] Mill, J. S. (1889), „A System of Logic”, Vol. 1 Book 3, London: Longmans Green

[157] Miller, D. W. (1994), „Critical Rationalism: A Restatement and Defence”, Chicago: Open Court

[158] Miller, D. W. (1996), „Propensities and Indeterminism”, in: „Karl Popper: Philosophy and Problems”, O'Hear, A. (Hrsg.), Cambridge: Cambridge University Press, 121-147

[159] Milne, P. (1985), „Can there be a Realist Single Case Interpretation of Propability?”, Erkenntnis 25, 129-132

[160] Monney, P. A. (2003), „A mathematical theory of arguments for statistical evidence”, Heidelberg: Physica-Verlag

[161] Mumford, S. (1998), „Dispositions”, Oxford: Oxford University Press

[162] Neyman, J. und Pearson, E. (1933), „On the problem of the most efficient test for a statistical hypotheses”, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A 231, 289-337

[163] Nielsen, H. B. (1989), „Random Dynamics and Relations between the Number of Fermion Generations and the Fine Structure Constants”, Acta Physica Polonia B 20, 427-468

[164] Nozick, R. (1969), „The Newcomb's problem and two principles of choice”, in: „Essays in honor of Carl G. Hempel”, Rescher, N. (Hrsg.), Synthese Library, Dordrecht: Reidel

[165] Nozick, R. (1981), „Philosophical explanations”, Oxford: Oxford University Press

[166] Olum, K. D. (2002), „The Doomsday Argument and the number of possible observers”, The Philosophical Quarterly 52, 164-184

[167] Ostrogradsky, M. V. (1838), „Extrait d’un mémoire sur la probabilité des erreurs des tribuneaux”, Mémoires d’Académie St. Petersbourg, Séries 6, 3 xix-xxv

[168] Peirce, C. S. (1976), „Schriften zum Pragmatismus und Pragmatizismus”, Frankfurt am Main: Suhrkamp

[169] Poincaré, H. (1906), „La science et l’hypothèse”, Paris: Gaulthier-Villars

[170] Popper, K. R. (1957), „The Propensity Interpretation of the Calculus of Probability and of the Quantum Theory”, in: „Observation and Interpretation, Proceedings of the Ninth Symposium of the Colston Research Society, University of Bristol”, Körner, S. (Hrsg.), 65-70

[171] Popper, K. R. (1959), „The Propensity Interpretation of Probability”, British Journal for the Philosophy of Science 10, 25-42

[172] Popper, K. R. (1959), „The logic of scientific discovery”, Basic Books

[173] Popper, K. R. (1963), „Conjectures and Refutations”, London: Routlegde

[174] Popper, K. R. (1990), „A World of Propensities”, Bristol: Thoemmes

[175] Pritchard, D. H. (2005), „Scepticism, epistemic luck and epistemic angst”, Australasian Journal of Philosophy 83, 185-206

[176] Pritchard, D. H. (2005), „Epistemic Luck”, Oxford: Oxford University Press

[177] Pritchard, D. H. (2007), „Anti-Luck Epistemology”, Synthese 158, 277-297

[178] Rabinowicz (2000), „Money Pump with Foresight”, in: „Imperceptible Harms and Benefits”, Almeida, M. J. (Hrsg.), Kluwer, 123-154

[179] Rabinowicz, W. (2002), „Does practical deliberation crowd out self-prediction?”, Erkenntnis 57, 91-122

[180] Ramsey, F. P. (1926), „Truth and Probability”, in: „Foundations of Mathematics and other Essays”(1931), Braithwaite, R. B. (Hrsg.), Routledge and Kegan, 156-198

[181] Reichenbach, H. (1949), „The Theory of Probability”, Berkeley: University of California Press

[182] Renyi, A. (1970), „Foundations of Probability”, Holden-Day Inc.

[183] Rescher, N. (1995), „Luck: the brilliant randomness of everyday life”, New York: Farrar, Straus and Giroux

[184] Ruspini, E. H. (1987), „The logical foundations of evidential reasoning", Research Note 408, revised version, SRI International, Menlo Park Calif.

[185] Russell, B. (1921), „Analysis of Mind", London: George Allen and Unwin

[186] Sagan, C. (1994), „Pale Blue Dot: A vision of the human future in space", Random House

[187] Sainsbury, R. M. (1997), „Easy Possibilities", Philosophy and Phenomenological Research 57, 907-919

[188] Salmon, W. C. (1979), „Propensities: a Discussion Review of Mellor (1971)", Erkenntnis 14, 182-216

[189] Sarin, R. und Wakker, P. P. (1992), „A Simple Axiomatization of Nonadditive Expected Utility", Econometrica 60, 1255-1272

[190] Savage, L. J. (1954), „The Foundations of Statistics", John Wiley

[191] Savage, L. J. et al. (1962), „The Foundations of Statistical Inference", London: Methuen

[192] Schmeidler, D. (1989), „Subjective Probability and Expected Utility Without Additivity", Econometrica 57, 571-587

[193] Schick, F. (1986), „Dutch Bookies and Money Pumps", Journal of Philosophy 83, 112-119

[194] Schlesinger, G. (1991), „The Sweep of Probability", Notre Dame: University of Notre Dame Press

[195] Schumm, G. F. (1986), „Transitivity, Preference and Indifference", Philosophical Studies 53, 435-437

[196] Shackle, G. L. S. (1969), „Decision, Order and Time in Human Affairs", 2. Auflage, Cambridge: Cambridge University Press

[197] Shafer, G. (1976), „A Mathematical Theory of Evidence", Princeton: Princeton University Press

[198] Shafer, G. (1982), „Lindley's Paradox", Journal of the American Statistical Association, Volume 77, Number 378

[199] Shafer, G. (1990), „Perspectives on the theory and practice of belief functions", International Journal of Approximate Reasoning 4, 323-362

[200] Shafer, G. und Srivastava, R. P. (1990), „The Bayesian and belief-function formalisms: A general perspective for auditing", Auditing: A Journal of Practice and Theory, Volume 9 Supplement

[201] Shimony, A. (1955), „Coherence and the Axioms of Probability”, Journal of Symbolic Logic, 20: 1-28

[202] Shimony, A. (1970), „Scientific Inference”, in: „The Nature and Function of Scientific Theories”, Colodny, R. (Hrsg.), Pittsburgh: University of Pittsburgh Press

[203] Shimony, A. (1988), „An Adamite Derivation of the Calculus of Probability”, in: „Probability and Causality”, Fetzer, J. H. (Hrsg.), Dordrecht: Reidel

[204] Shoemaker, S. (1980), „Causality and Properties”, in: „Time and Cause”, VanInwagen, P. (Hrsg.), Dordrecht: Reidel

[205] Skyrms, B. (1980), „Causal Necessity”, New Haven: Yale University Press

[206] Skyrms, B. (1980), „Higher Order Degrees of Belief”, in: „Prospects for Pragmatism”, Mellor, H. (Hrsg.), Cambridge: Cambridge University Press, 109-137

[207] Skyrms, B. (1984), „Pragmatics and Empiricism”, New Haven: Yale University

[208] Skyrms, B. (1987), „Coherence”, in: „Scientific Inquiry in Philosophical Perspective”, Rescher, N. (Hrsg.), Pittsburgh: University of Pittsburgh Press

[209] Sloterdijk, P. (2009), „Du musst Dein Leben ändern. Über Anthropotechnik.”, Frankfurt am Main: Suhrkamp

[210] Sobel, J. H. (1985), „Circumstances and dominance in causal decision theory”, Synthese 62, 167-202

[211] Sosa, E. (1999), „How to defeat opposition to moore”, Philosophical Perspectives 13, 141-154

[212] Sosa, E. (2000), „Skepticism and Contextualism”, Philosophical Issues 10, 1-18

[213] Spohn, W. (1977), „Where Luce and Krantz do really generalize Savage‘s Decision Model”, Erkenntnis 11, 113-134

[214] Spohn, W. (1978), „Grundlagen der Entscheidungstheorie”, Kronberg/Ts.: Scriptor

[215] Spohn, W. (1986), „The representation of Popper measures”, Topoi 5, 69-74

[216] Spohn, W. (1988), „Ordinal conditional functions: a dynamic theory of epistemic states”, in: „Causation in Decision, Belief Change, and Statistics, Volume 2”, Harper, W. und Skyrms, B. (Hrsg.), Dordrecht: Reidel, 105-134

[217] Spohn, W. (1994), „Wie lässt sich die Spieltheorie verstehen?”, in: „Praktische Rationalität”, Nida-Rümelin, J. , und Wessels, U. (Hrsg.), Berlin: de Gruyter, 197-237

[218] Spohn, W. (2000), „Strategic Rationality", Forschungsberichte der DFG-Forschergruppe Logik in der Philosophie No. 24

[219] Spohn, W. (2009), „A Survey of Ranking Theory", in: „Degrees of Belief. An Anthology", Huber, F. und Schmidt-Petri, C. (Hrsg.), Dordrecht: Springer

[220] Stalnaker, R. (1970), „Probabilities and Conditionals", Philosophy of Science 37, 64-80

[221] Stegmüller, W. (1973), „Statistische Begründung und statistische Analyse", Probleme und Resultate der Wissenschaftstheorie und analytischen Philosophie, Band 4 Personelle und statistische Wahrscheinlichkeit Teil E, Heidelberg: Springer

[222] Stegmüller, W. (1986), „Das Problem der Induktion: Hume's Herausforderung und moderne Antworten", Wiss. Ges. Darmstadt

[223] Strevens, M. (1995), „A closer look at the 'new' principle", British Journal for the Philosophy of Science 46, 545-561

[224] Strotz, R. H. (1955), „Myopia and Inconsistency in Dynamic Utility Maximization", Review of Economic Studies 23, 165-180

[225] Sturgeon, S. (1998), „Humean Chance: Five Questions for David Lewis", Erkenntnis 49, 321-335

[226] Suppes, P. (1956), „The role of subjective probability and utility in decision-making", in: Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume 5, 61-73 , University of California Press

[227] Suppes, P. (2007), „Where Do Bayesian Priors Come From?", Synthese 156, 441-471

[228] Thau, M. (1994), „Undermining and admissibility", Mind 103(412), 491-503

[229] Tippett, L. H. C. (1927), „Random sampling numbers: Tracts for computers", Cambridge: Cambridge University Press

[230] VanInwagen, P. (1997), „Against middle knowledge", Midwest Studies in Philosophy 21, 225-236

[231] VanFraassen, B. (1984), „Belief and the Will", Journal of Philosophy 81, 235-256

[232] VanFraassen, B. (1989), „Laws and Symmetry", Oxford: Clarendon Press

[233] VanFraassen, B. (1995), „Belief and the Problem of Ulysses and the Sirens", Philosophical Studies 77, 7-37

[234] Venn, J. (1876), „The Logic of Chance", 2. Auflage (1962), New York: Macmillan and Co

[235] Vilenkin, A. (1995), „Predictions from Quantum Cosmology", Physical Review Letters 74, 846-849

[236] Ville, J. (1939), „Etudes critique de la notion de collectif", Paris: Gauthier-Villars

[237] Vineberg, S. (1997), „Dutch Books, Dutch Strategies and what they show about rationality", Philosophical Studies 86(2), 185-201

[238] Vogel, J. (1999), „The new relevant alternatives theory", Philosophical Perspectives 13, 155-180

[239] VonKries, J. (1886), „Die Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Rational Expectation", Freiburg: Mohr

[240] VonMises, R. (1928), „Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit", Wien: Springer

[241] VonMises, R. (1939), „Kleines Lehrbuch des Positivismus", Den Haag

[242] VonNeumann, J., und Morgenstern, O. (1944), „Theory of Games and Economic Behavior", Princeton, dt. Übers.: „Spieltheorie und wirtschaftliches Verhalten"(1961), Würzburg

[243] VonPlato, J. (1994), „Creating Modern Probability", Cambridge: Cambridge University Press

[244] Vranas, P. (1998), „Who's afraid of Undermining? Why the Principal Principle need not contradict Humean Supervenience", in: Sixteenth Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association, Kansas City (Missouri)

[245] Vyasa (2010), „The Story of Nala: An Episode of the Mahabarata", Übersetzung von H. H. Milman, Nabu Press

[246] Wakker, P. P. (2005), „Decision-Foundations for Properties of Nonadditive Measures: General State Spaces or General Outcome Spaces", Games and Economic Behavior 50, 107-125

[247] Wald, A. (1937), „Zur Widerspruchsfreiheit des Kollektivbegriffes in der Wahrscheinlichkeitsrechnung", Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums 8, 38-72

[248] Wegner, D. (2002), „The Illusion of Conscious Will", Cambridge: MIT Press

[249] Williamson, T. (2000), „Knowledge and its limits", Oxford: Oxford University Press

[250] Wittgenstein, L. (1921), „Tractatus logico-philosophicus", Leipzig(1990): Reclam

[251] Yaari, M. E. (1977), „Endogeneous Changes in Tastes: A Philosophical Discussion”, Erkenntnis 11, 157-196

[252] Zadeh, L. A. (1975), „Fuzzy Logics and Approximate Reasoning”, Synthese 30, 407-428

[253] Zadeh, L. A. (1978), „Fuzzy sets a basis for a theory of possibility”, Fuzzy Sets and Systems 1, 3-28

[254] Zagzebski, L. (1999), „What is knowledge?”, in: „The Blackwell guide to epistemology”, Greco, J. und Sosa, E. (Hrsg.), Malden(Massachusetts): Blackwell, 92-116